Classes “combinatoires” : un point de vue catégorique

Laurent Poinsot

LIPN - UMR CNRS 7030
Université Paris-Nord XIII - Institut Galilée

Séminaire CIP

Le 4 décembre 2012

Table des matières

Table des matières

L'univers (1/2)

Un univers $\mathcal{U}$ est ensemble (au sens ZFC) vérifiant les axiomes suivants :

1. Si $x \in \mathcal{U}$, alors $x \subseteq \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ est dit être transitif) ;
2. Si $x, y \in \mathcal{U}$, alors $\{ x, y \} \in \mathcal{U}$;
3. Si $x \in \mathcal{U}$, alors $2^x \in \mathcal{U}$;
4. Si $I \in \mathcal{U}$ et $x_i \in \mathcal{U}$ pour chaque $i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$;
5. On supposera en outre que $\omega \in \mathcal{U}$.

L'univers (2/2)

L'univers (2/2)

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont les petits ensembles.

L'univers (2/2)

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont les petits ensembles. Un ensemble large est une partie de $\mathcal{U}$ (remarquons que $\{\mathcal{U}\}$ n'est pas un ensemble large – à cause de l'axiome de fondation – encore moins petit même s'il est de petit cardinal).

L'univers (2/2)

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont les petits ensembles. Un ensemble large est une partie de $\mathcal{U}$ (remarquons que $\{\,\mathcal{U}\,\}$ n'est pas un ensemble large – à cause de l'axiome de fondation – encore moins petit même s'il est de petit cardinal).

$\mathcal{S}et$ désigne la catégorie des petits ensembles (et applications ensemblistes), et $\cong$ représente la relation d'isomorphisme dans cette catégorie.

L'univers (2/2)

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont les petits ensembles. Un ensemble large est une partie de $\mathcal{U}$ (remarquons que $\{\mathcal{U}\}$ n'est pas un ensemble large – à cause de l'axiome de fondation – encore moins petit même s'il est de petit cardinal).

$\mathcal{S}et$ désigne la catégorie des petits ensembles (et applications ensemblistes), et $\cong$ représente la relation d'isomorphisme dans cette catégorie.

Remarque : L'existence des univers requiert un axiome à ajouter à ZFC.

Cardinaux fortement inaccessibles

Un cardinal κ est fortement inaccessible si, et seulement si :

Cardinaux fortement inaccessibles

Un cardinal κ est fortement inaccessible si, et seulement si :

1. Quel que soit le cardinal $\kappa' < \kappa$, $2^{\kappa'} < \kappa$;

Cardinaux fortement inaccessibles

Un cardinal κ est fortement inaccessible si, et seulement si :

1. Quel que soit le cardinal $\kappa' < \kappa$, $2^{\kappa'} < \kappa$;
2. κ est régulier : Si $|I| < \kappa$ et si pour chaque $i \in I$, le cardinal κ_i est $< \kappa$, alors $\sum_{i \in I} \kappa_i < \kappa$.

Cardinaux fortement inaccessibles

Un cardinal κ est fortement inaccessible si, et seulement si :

1. Quel que soit le cardinal $\kappa' < \kappa$, $2^{\kappa'} < \kappa$;
2. κ est régulier : Si $|I| < \kappa$ et si pour chaque $i \in I$, le cardinal κ_i est $< \kappa$, alors $\sum_{i \in I} \kappa_i < \kappa$.

Par exemple, $\aleph_0$ est fortement inaccessible.

La hiérarchie cumulative de von Neumann

Soit $\mathcal{V}_\lambda$ l'ensemble défini par induction transfinie sur les ordinaux λ :

La hiérarchie cumulative de von Neumann

Soit $\mathcal{V}_\lambda$ l'ensemble défini par induction transfinie sur les ordinaux λ :

1. $\mathcal{V}_0 = \emptyset$;

La hiérarchie cumulative de von Neumann

Soit $\mathcal{V}_\lambda$ l'ensemble défini par induction transfinie sur les ordinaux λ :

1. $\mathcal{V}_0 = \emptyset$;
2. $\mathcal{V}_{\lambda+1} = 2^{\mathcal{V}_\lambda}$ pour tout ordinal λ ;

La hiérarchie cumulative de von Neumann

Soit $\mathcal{V}_\lambda$ l'ensemble défini par induction transfinie sur les ordinaux λ :

1. $\mathcal{V}_0 = \emptyset$;
2. $\mathcal{V}_{\lambda+1} = 2^{\mathcal{V}_\lambda}$ pour tout ordinal λ ;
3. $\mathcal{V}_\lambda = \bigcup_{\lambda' < \lambda} \mathcal{V}_{\lambda'}$ pour tout ordinal limite λ.

Univers et cardinaux fortement inaccessibles

N. H. Williams (1969) a démontré qu'un univers $\mathcal{U}$ est nécessairement de la forme $\mathcal{V}_\kappa$ où $\kappa = |\mathcal{U}|$ est un cardinal fortement inaccessible.

Univers et cardinaux fortement inaccessibles

N. H. Williams (1969) a démontré qu'un univers $\mathcal{U}$ est nécessairement de la forme $\mathcal{V}_\kappa$ où $\kappa = |\mathcal{U}|$ est un cardinal fortement inaccessible.

On en déduit que quel que soit le cardinal $\kappa < \kappa$, $\mathcal{C}ard_{<\kappa} \in \mathcal{U}$ où $\mathcal{C}ard_{<\kappa}$ est l'ensemble des cardinaux $< \kappa$.

Univers et cardinaux fortement inaccessibles

N. H. Williams (1969) a démontré qu'un univers $\mathcal{U}$ est nécessairement de la forme $\mathcal{V}_\kappa$ où $\kappa = |\mathcal{U}|$ est un cardinal fortement inaccessible.

On en déduit que quel que soit le cardinal $\kappa < \kappa$, $\mathcal{C}ard_{<\kappa} \in \mathcal{U}$ où $\mathcal{C}ard_{<\kappa}$ est l'ensemble des cardinaux $< \kappa$.

Nous avons également $\mathcal{C}ard_{<\kappa} \subseteq \mathcal{U}$

Univers et cardinaux fortement inaccessibles

N. H. Williams (1969) a démontré qu'un univers $\mathcal{U}$ est nécessairement de la forme $\mathcal{V}_\kappa$ où $\kappa = |\mathcal{U}|$ est un cardinal fortement inaccessible.

On en déduit que quel que soit le cardinal $\kappa < \kappa$, $\mathcal{C}ard_{<\kappa} \in \mathcal{U}$ où $\mathcal{C}ard_{<\kappa}$ est l'ensemble des cardinaux $< \kappa$.

Nous avons également $\mathcal{C}ard_{<\kappa} \subseteq \mathcal{U}$ (en général $\mathcal{C}ard_{<\kappa}$ n'est pas un petit ensemble : par exemple, $\mathcal{C}ard_{<\aleph_0} = \aleph_0 \notin \mathcal{V}_{\aleph_0}$).

Table des matières

Addition

Rappelons que si κ_1, κ_2 sont deux cardinaux dont l'un est transfini, alors $\kappa_1 + \kappa_2 = \max\{\, \kappa_1, \kappa_2 \,\} = \kappa_1 \kappa_2$ (pour le produit on suppose en outre que les deux cardinaux sont non nuls).

Addition

Rappelons que si κ_1, κ_2 sont deux cardinaux dont l'un est transfini, alors $\kappa_1 + \kappa_2 = \max\{\, \kappa_1, \kappa_2 \,\} = \kappa_1\kappa_2$ (pour le produit on suppose en outre que les deux cardinaux sont non nuls).

On démontre que pour $\kappa \leq$ κ transfini, $\mathcal{C}ard_{<\kappa}$ est un semi-anneau commutatif.

Addition

Rappelons que si κ_1, κ_2 sont deux cardinaux dont l'un est transfini, alors $\kappa_1 + \kappa_2 = \max\{\, \kappa_1, \kappa_2 \,\} = \kappa_1 \kappa_2$ (pour le produit on suppose en outre que les deux cardinaux sont non nuls).

On démontre que pour $\kappa \leq \mathrm{\kappa}$ transfini, $\mathcal{C}\mathit{ard}_{<\kappa}$ est un semi-anneau commutatif. Si X est un petit ensemble, alors $\mathcal{C}\mathit{ard}^{X}_{<\kappa}$ est un monoïde commutatif pour la loi d'addition ponctuelle.

Rappelons que si κ_1, κ_2 sont deux cardinaux dont l'un est transfini, alors $\kappa_1 + \kappa_2 = \max\{\,\kappa_1, \kappa_2\,\} = \kappa_1\kappa_2$ (pour le produit on suppose en outre que les deux cardinaux sont non nuls).

On démontre que pour $\kappa \leq \upkappa$ transfini, $\mathcal{C}\mathit{ard}_{<\kappa}$ est un semi-anneau commutatif. Si X est un petit ensemble, alors $\mathcal{C}\mathit{ard}^{X}_{<\kappa}$ est un monoïde commutatif pour la loi d'addition ponctuelle. C'est un petit monoïde lorsque $\kappa < \upkappa$ et un monoïde large si $\kappa = \upkappa$.

Sommes transfinies (1/3) : cofinalité

Soit λ un ordinal. La confinalité $\mathrm{cf}(\lambda)$ est le plus petit ordinal θ pour lequel il existe une suite croissante d'ordinaux $(\gamma_\nu)_{\nu<\theta}$ telle que $\bigcup_{\nu<\theta} \gamma_\nu = \lambda$.

Sommes transfinies (1/3) : cofinalité

Soit λ un ordinal. La confinalité $\mathrm{cf}(\lambda)$ est le plus petit ordinal θ pour lequel il existe une suite croissante d'ordinaux $(\gamma_\nu)_{\nu<\theta}$ telle que $\bigcup_{\nu<\theta} \gamma_\nu = \lambda$.

La cofinalité est un cardinal et satisfait $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$.

Sommes transfinies (1/3) : cofinalité

Soit λ un ordinal. La confinalité $\mathrm{cf}(\lambda)$ est le plus petit ordinal θ pour lequel il existe une suite croissante d'ordinaux $(\gamma_\nu)_{\nu<\theta}$ telle que $\bigcup_{\nu<\theta} \gamma_\nu = \lambda$.

La cofinalité est un cardinal et satisfait $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$.

Un cardinal κ est régulier si, et seulement si, $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$.

Sommes transfinies (1/3) : cofinalité

Soit λ un ordinal. La confinalité $\mathrm{cf}(\lambda)$ est le plus petit ordinal θ pour lequel il existe une suite croissante d'ordinaux $(\gamma_\nu)_{\nu<\theta}$ telle que $\bigcup_{\nu<\theta} \gamma_\nu = \lambda$.

La cofinalité est un cardinal et satisfait $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$.

Un cardinal κ est régulier si, et seulement si, $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$. Tout cardinal transfini successeur est régulier de même que tout cardinal fortement inaccessible.

Sommes transfinies (1/3) : cofinalité

Soit λ un ordinal. La confinalité $\mathrm{cf}(\lambda)$ est le plus petit ordinal θ pour lequel il existe une suite croissante d'ordinaux $(\gamma_\nu)_{\nu<\theta}$ telle que $\bigcup_{\nu<\theta} \gamma_\nu = \lambda$.

La cofinalité est un cardinal et satisfait $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$.

Un cardinal κ est régulier si, et seulement si, $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$. Tout cardinal transfini successeur est régulier de même que tout cardinal fortement inaccessible.

Soient κ un cardinal, et $(\kappa_i)_{i\in I}$ une famille de cardinaux $< \kappa$. Supposons en outre que $|\{\, i \in I : \kappa_i \neq 0 \,\}| < \mathrm{cf}(\kappa)$. Alors,

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \kappa \ .$$

Sommes transfinies (2/3) : familles localement sommables

Une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$ est localement sommable relativement à κ si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, l'ensemble $I_x = \{\, i \in I \colon f_i(x) \neq 0 \,\}$ est de cardinal $< \mathrm{cf}(\kappa)$.

Sommes transfinies (2/3) : familles localement sommables

Une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ est localement sommable relativement à κ si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, l'ensemble $I_x = \{ i \in I \colon f_i(x) \neq 0 \}$ est de cardinal $< \mathrm{cf}(\kappa)$.

Lemme

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille localement sommable relativement à κ. Alors quel que soit $x \in X$, $\sum_{i \in I} f_i(x) < \kappa$.

Sommes transfinies (2/3) : familles localement sommables

Une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ est localement sommable relativement à κ si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, l'ensemble $I_x = \{\, i \in I \colon f_i(x) \neq 0 \,\}$ est de cardinal $< \mathrm{cf}(\kappa)$.

Lemme

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille localement sommable relativement à κ. Alors quel que soit $x \in X$, $\displaystyle\sum_{i\in I} f_i(x) < \kappa$.

Cela permet de définir un élément $\displaystyle\sum_{i\in I} f_i \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$.

Sommes transfinies (2/3) : familles localement sommables

Une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$ est localement sommable relativement à κ si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, l'ensemble $I_x = \{\, i \in I \colon f_i(x) \neq 0 \,\}$ est de cardinal $< \mathrm{cf}(\kappa)$.

Lemme

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille localement sommable relativement à κ. Alors quel que soit $x \in X$, $\displaystyle\sum_{i \in I} f_i(x) < \kappa$.

Cela permet de définir un élément $\displaystyle\sum_{i \in I} f_i \in \mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$.

Remarque : Si $\kappa = \aleph_0$, alors une famille localement sommable relativement à $\aleph_0$ est exactement une famille localement finie.

Sommes transfinies (3/3) : écriture sommatoire

Si $\kappa' < \kappa$ et $f \in \mathcal{Card}^X_{<\kappa}$, alors $\kappa' \cdot f \in \mathcal{Card}^X_{<\kappa}$ est défini par $(\kappa' \cdot f)(x) = \kappa' f(x)$.

Sommes transfinies (3/3) : écriture sommatoire

Si $\kappa' < \kappa$ et $f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$, alors $\kappa' \cdot f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ est défini par $(\kappa' \cdot f)(x) = \kappa' f(x)$.

Pour chaque $x \in X$, notons 1_x l'élément de $\mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ défini comme la masse ponctuelle en x.

Sommes transfinies (3/3) : écriture sommatoire

Si $\kappa' < \kappa$ et $f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$, alors $\kappa' \cdot f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ est défini par $(\kappa' \cdot f)(x) = \kappa' f(x)$.

Pour chaque $x \in X$, notons 1_x l'élément de $\mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ défini comme la masse ponctuelle en x.

Lemme

Soit $f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$. Alors

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \cdot 1_x \ .$$

Sommes transfinies (3/3) : écriture sommatoire

Si $\kappa' < \kappa$ et $f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$, alors $\kappa' \cdot f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ est défini par $(\kappa' \cdot f)(x) = \kappa' f(x)$.

Pour chaque $x \in X$, notons 1_x l'élément de $\mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ défini comme la masse ponctuelle en x.

Lemme

Soit $f \in \mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$. Alors

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \cdot 1_x \ .$$

(Résulte de ce que $(f(x) \cdot 1_x)_{x \in X}$ est localement sommable relativement à κ.)

Convolution (1/3)

Soient κ un cardinal transfini et M un monoïde.

Convolution (1/3)

Soient κ un cardinal transfini et M un monoïde. Pour $f, g \in \mathcal{C}ard^{M}_{<\kappa}$, on pose $(f \times g)(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} f(x_1)g(x_2)$ pour chaque $x \in M$.

Convolution (1/3)

Soient κ un cardinal transfini et M un monoïde. Pour $f, g \in \mathcal{C}ard^M_{<\kappa}$, on pose $(f \times g)(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} f(x_1)g(x_2)$ pour chaque $x \in M$.

Remarque : Clairement, $f \times g$ n'est pas nécessairement un élément de $\mathcal{C}ard^M_{<\kappa}$.

Convolution (2/3)

Soit $\kappa \leq$ κ un cardinal transfini régulier.

Convolution (2/3)

Soit $\kappa \leq \upkappa$ un cardinal transfini régulier. La catégorie $\mathcal{F}\!\mathit{ib}_{<\kappa}$ a pour objets les petits ensembles, et pour morphismes les applications ensemblistes $f\colon X \to Y$ à fibres de cardinal $< \kappa$.

Convolution (2/3)

Soit $\kappa \leq \varkappa$ un cardinal transfini régulier. La catégorie $\mathscr{F}ib_{<\kappa}$ a pour objets les petits ensembles, et pour morphismes les applications ensemblistes $f : X \to Y$ à fibres de cardinal $< \kappa$.

Le produit cartésien ensembliste constitue une structure monoïdale (symétrique) sur $\mathscr{F}ib_{<\kappa}$ (ce n'est pas le produit catégorique puisque les projections ne sont pas en général des morphismes de $\mathscr{F}ib_{<\kappa}$).

Convolution (2/3)

Soit $\kappa \leq \upkappa$ un cardinal transfini régulier. La catégorie $\mathscr{Fib}_{<\kappa}$ a pour objets les petits ensembles, et pour morphismes les applications ensemblistes $f : X \to Y$ à fibres de cardinal $< \kappa$.

Le produit cartésien ensembliste constitue une structure monoïdale (symétrique) sur $\mathscr{Fib}_{<\kappa}$ (ce n'est pas le produit catégorique puisque les projections ne sont pas en général des morphismes de $\mathscr{Fib}_{<\kappa}$).

Un monoïde interne à cette catégorie monoïdale est appelé monoïde à décompositions $< \kappa$.

Convolution (2/3)

Soit $\kappa \leq \mathrm{\kappa}$ un cardinal transfini régulier. La catégorie $\mathscr{Fib}_{<\kappa}$ a pour objets les petits ensembles, et pour morphismes les applications ensemblistes $f \colon X \to Y$ à fibres de cardinal $< \kappa$.

Le produit cartésien ensembliste constitue une structure monoïdale (symétrique) sur $\mathscr{Fib}_{<\kappa}$ (ce n'est pas le produit catégorique puisque les projections ne sont pas en général des morphismes de $\mathscr{Fib}_{<\kappa}$).

Un monoïde interne à cette catégorie monoïdale est appelé monoïde à décompositions $< \kappa$. Un monoïde usuel M est donc à décompositions $< \kappa$ si, et seulement si, quel que soit $z \in M$, $|\{\, (x, y) \in M \times M \colon xy = z \,\}| < \kappa$.

Convolution (2/3)

Soit $\kappa \leq$ κ un cardinal transfini régulier. La catégorie $\mathscr{F}\mathit{ib}_{<\kappa}$ a pour objets les petits ensembles, et pour morphismes les applications ensemblistes $f \colon X \to Y$ à fibres de cardinal $< \kappa$.

Le produit cartésien ensembliste constitue une structure monoïdale (symétrique) sur $\mathscr{F}\mathit{ib}_{<\kappa}$ (ce n'est pas le produit catégorique puisque les projections ne sont pas en général des morphismes de $\mathscr{F}\mathit{ib}_{<\kappa}$).

Un monoïde interne à cette catégorie monoïdale est appelé monoïde à décompositions $< \kappa$. Un monoïde usuel M est donc à décompositions $< \kappa$ si, et seulement si, quel que soit $z \in M$, $|\{\, (x, y) \in M \times M \colon xy = z \,\}| < \kappa$.

Remarque : Un monoïde à décompositions $< \aleph_0$ est exactement un monoïde à décompositions finies.

Convolution (3/3)

Soient κ un cardinal transfini régulier et M un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Convolution (3/3)

Soient κ un cardinal transfini régulier et M un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Alors $\mathcal{C}ard^{M}_{<\kappa}$ est un semi-anneau, pour l'addition précédemment définie et pour le produit de convolution, que l'on note $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$.

Convolution (3/3)

Soient κ un cardinal transfini régulier et M un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Alors $\mathcal{C}ard^{M}_{<\kappa}$ est un semi-anneau, pour l'addition précédemment définie et pour le produit de convolution, que l'on note $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$.

Remarque : Lorsque M est un monoïde à décompositions finies, $\mathcal{C}ard_{<\aleph_0}[[M]]$ est le semi-anneau large $\mathbb{N}[[M]]$ de M à coefficients entiers.

Table des matières

Deux points de vue

Préfaisceaux (1/2)

Soit X un (petit) ensemble vu comme une catégorie discrète (ses seuls morphismes sont les identités) et $\kappa \leq$ κ un cardinal.

Deux points de vue

Préfaisceaux (1/2)

Soit X un (petit) ensemble vu comme une catégorie discrète (ses seuls morphismes sont les identités) et $\kappa \leq \kappa$ un cardinal.

Un foncteur $\mathcal{C}\colon X \to \mathcal{S}et$ tel que pour tout $x \in X$, $|\mathcal{C}(x)| < \kappa$ est appelé préfaisceau $< \kappa$.

Deux points de vue

Préfaisceaux (1/2)

Soit X un (petit) ensemble vu comme une catégorie discrète (ses seuls morphismes sont les identités) et $\kappa \leq$ κ un cardinal.

Un foncteur $\mathcal{C}\colon X \to \mathcal{S}et$ tel que pour tout $x \in X$, $|\mathcal{C}(x)| < \kappa$ est appelé préfaisceau $< \kappa$.

Un morphisme $\alpha\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux préfaisceaux $< \kappa$ est une transformation naturelle.

Deux points de vue

Préfaisceaux (1/2)

Soit X un (petit) ensemble vu comme une catégorie discrète (ses seuls morphismes sont les identités) et $\kappa \leq \kappa$ un cardinal.

Un foncteur $\mathcal{C} \colon X \to \mathcal{S}et$ tel que pour tout $x \in X$, $|\mathcal{C}(x)| < \kappa$ est appelé préfaisceau $< \kappa$.

Un morphisme $\alpha \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux préfaisceaux $< \kappa$ est une transformation naturelle. C'est donc simplement une famille $(\alpha_x)_{x \in X}$ d'applications de $\mathcal{C}(x)$ dans $\mathcal{D}(x)$.

Deux points de vue

Préfaisceaux (1/2)

Soit X un (petit) ensemble vu comme une catégorie discrète (ses seuls morphismes sont les identités) et $\kappa \leq \kappa$ un cardinal.

Un foncteur $\mathcal{C}\colon X \to \mathcal{S}et$ tel que pour tout $x \in X$, $|\mathcal{C}(x)| < \kappa$ est appelé préfaisceau $< \kappa$.

Un morphisme $\alpha\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux préfaisceaux $< \kappa$ est une transformation naturelle. C'est donc simplement une famille $(\alpha_x)_{x \in X}$ d'applications de $\mathcal{C}(x)$ dans $\mathcal{D}(x)$. De tels morphismes se composent de façon évidente : $(\alpha \circ \beta)_x = \alpha_x \circ \beta_x$ (c'est la composition “verticale” usuelle des transformations naturelles).

Deux points de vue

Préfaisceaux (1/2)

Soit X un (petit) ensemble vu comme une catégorie discrète (ses seuls morphismes sont les identités) et $\kappa \leq \upkappa$ un cardinal.

Un foncteur $\mathcal{C}\colon X \to \mathcal{S}et$ tel que pour tout $x \in X$, $|\mathcal{C}(x)| < \kappa$ est appelé préfaisceau $< \kappa$.

Un morphisme $\alpha\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux préfaisceaux $< \kappa$ est une transformation naturelle. C'est donc simplement une famille $(\alpha_x)_{x \in X}$ d'applications de $\mathcal{C}(x)$ dans $\mathcal{D}(x)$. De tels morphismes se composent de façon évidente : $(\alpha \circ \beta)_x = \alpha_x \circ \beta_x$ (c'est la composition "verticale" usuelle des transformations naturelles).

Les préfaisceaux $< \kappa$ et leurs morphismes forment une catégorie $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$.

Deux points de vue

Préfaisceaux (1/2)

Soit X un (petit) ensemble vu comme une catégorie discrète (ses seuls morphismes sont les identités) et $\kappa \leq$ κ un cardinal.

Un foncteur $\mathcal{C} \colon X \to \mathcal{S}et$ tel que pour tout $x \in X$, $|\mathcal{C}(x)| < \kappa$ est appelé préfaisceau $< \kappa$.

Un morphisme $\alpha \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux préfaisceaux $< \kappa$ est une transformation naturelle. C'est donc simplement une famille $(\alpha_x)_{x \in X}$ d'applications de $\mathcal{C}(x)$ dans $\mathcal{D}(x)$. De tels morphismes se composent de façon évidente : $(\alpha \circ \beta)_x = \alpha_x \circ \beta_x$ (c'est la composition "verticale" usuelle des transformations naturelles).

Les préfaisceaux $< \kappa$ et leurs morphismes forment une catégorie $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$. On remarque que si $\kappa' < \kappa$, alors $\mathcal{C}_{<\kappa'}(X)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux préfaisceaux $< \kappa$.

Deux points de vue

Préfaisceaux (2/2)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux préfaisceaux $< \kappa$.

On a : $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ si, et seulement si, quel que soit $x \in X$, $\mathcal{C}(x) \cong \mathcal{D}(x)$.

Une classe pondérée ($< \kappa$) sur X est un couple (C, p) où C est un petit ensemble, avec p une fonction de poids $p\colon C \to X$ à fibres $< \kappa$.

Une classe pondérée ($< \kappa$) sur X est un couple (C, p) où C est un petit ensemble, avec p une fonction de poids $p\colon C \to X$ à fibres $< \kappa$.

Soient (C, p) et (D, q) deux classes pondérées (sur X). Une application $f\colon C \to D$ est un morphismes si, et seulement si, quel que soit $c \in C$, $p(c) = q(f(c))$.

Deux points de vue

Préfaisceaux et classes pondérées

Les catégories de préfaisceaux $< \kappa$ et de classes pondérées $< \kappa$ sur X sont équivalentes.

Deux points de vue

Préfaisceaux et classes pondérées

Les catégories de préfaisceaux $< \kappa$ et de classes pondérées $< \kappa$ sur X sont équivalentes.

Au niveau des objets :

1. À un préfaisceau $\mathcal{C}$ on associe une classe pondérée $C = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{C}(x)$ avec $p\colon C \to X$ donné par $p(c) = x$ si, et seulement si, $c \in \mathcal{C}(x)$.

Deux points de vue

Préfaisceaux et classes pondérées

Les catégories de préfaisceaux $< \kappa$ et de classes pondérées $< \kappa$ sur X sont équivalentes.

Au niveau des objets :

1. À un préfaisceau $\mathcal{C}$ on associe une classe pondérée $C = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{C}(x)$ avec $p \colon C \to X$ donné par $p(c) = x$ si, et seulement si, $c \in \mathcal{C}(x)$.
2. À une classe pondérée (C, p) on associe un préfaisceau $\mathcal{C}$ défini par $\mathcal{C}(x) = p^{-1}(\{ x \})$ pour chaque $x \in X$.

Un squelette de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$

Définition

Un squelette S d'une catégorie C est une sous-catégorie pleine de C dans laquelle chaque objet de C est isomorphe à un objet de S, et deux objets isomorphes de D sont égaux.

Un squelette de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$

Définition

Un squelette S d'une catégorie C est une sous-catégorie pleine de C dans laquelle chaque objet de C est isomorphe à un objet de S, et deux objets isomorphes de D sont égaux.

L'ensemble $\mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$ est la classe des objets d'un squelette noté $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$ de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$:

Un squelette de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$

Définition

Un squelette S d'une catégorie C est une sous-catégorie pleine de C dans laquelle chaque objet de C est isomorphe à un objet de S, et deux objets isomorphes de D sont égaux.

L'ensemble $\mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$ est la classe des objets d'un squelette noté $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$ de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$: la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$ déterminée par les objets de $\mathcal{C}ard^X_{<\kappa}$.

Un squelette de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$

Définition

Un squelette S d'une catégorie C est une sous-catégorie pleine de C dans laquelle chaque objet de C est isomorphe à un objet de S, et deux objets isomorphes de D sont égaux.

L'ensemble $\mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$ est la classe des objets d'un squelette noté $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$ de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$: la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$ déterminée par les objets de $\mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$.

On remarque que le foncteur $|\cdot|\colon \mathcal{C}_{<\kappa}(X) \to \mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$, défini au niveau des objets par $|\mathcal{C}|(x) = |\mathcal{C}(x)|$ pour chaque préfaisceau $\mathcal{C}$, est une équivalence de catégories.

Un squelette de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$

Définition

Un squelette S d'une catégorie C est une sous-catégorie pleine de C dans laquelle chaque objet de C est isomorphe à un objet de S, et deux objets isomorphes de D sont égaux.

L'ensemble $\mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$ est la classe des objets d'un squelette noté $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$ de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$: la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{<\kappa}(X)$ déterminée par les objets de $\mathcal{C}ard^{X}_{<\kappa}$.

On remarque que le foncteur $|\cdot|\colon \mathcal{C}_{<\kappa}(X) \to \mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$, défini au niveau des objets par $|\mathcal{C}|(x) = |\mathcal{C}(x)|$ pour chaque préfaisceau $\mathcal{C}$, est une équivalence de catégories.

Bien évidemment, $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ si, et seulement si, $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$.

Coproduit

Supposons fixé $\aleph_0 \leq \kappa \leq \upkappa$.

Coproduit

Supposons fixé $\aleph_0 \leq \kappa \leq \upkappa$.

Le coproduit de deux préfaisceaux $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sur X est défini ponctuellement par

$$(\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D})(x) = \mathcal{C}(x) \sqcup \mathcal{D}(x)$$

pour chaque $x \in X$.

Coproduit

Supposons fixé $\aleph_0 \leq \kappa \leq \kappa$.

Le coproduit de deux préfaisceaux $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sur X est défini ponctuellement par

$$(\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D})(x) = \mathcal{C}(x) \sqcup \mathcal{D}(x)$$

pour chaque $x \in X$.

Du point de vue des classes pondérées, le coproduit $(C, p) \sqcup (D, q)$ est donné par l'ensemble $C \sqcup D$ avec la fonction de poids $r \colon C \sqcup D \to X$ telle que $r(c) = p(c)$ pour tout $c \in C$, et $r(d) = q(d)$ pour tout $d \in D$.

Coproduit

Supposons fixé $\aleph_0 \leq \kappa \leq \kappa$.

Le coproduit de deux préfaisceaux $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sur X est défini ponctuellement par

$$(\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D})(x) = \mathcal{C}(x) \sqcup \mathcal{D}(x)$$

pour chaque $x \in X$.

Du point de vue des classes pondérées, le coproduit $(C, p) \sqcup (D, q)$ est donné par l'ensemble $C \sqcup D$ avec la fonction de poids $r\colon C \sqcup D \to X$ telle que $r(c) = p(c)$ pour tout $c \in C$, et $r(d) = q(d)$ pour tout $d \in D$.

Au niveau du squelette $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$, nous avons $f \sqcup g = f + g$ et $|\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}| = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}|$.

Coproduit

Supposons fixé $\aleph_0 \leq \kappa \leq \kappa$.

Le coproduit de deux préfaisceaux $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sur X est défini ponctuellement par

$$(\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D})(x) = \mathcal{C}(x) \sqcup \mathcal{D}(x)$$

pour chaque $x \in X$.

Du point de vue des classes pondérées, le coproduit $(C, p) \sqcup (D, q)$ est donné par l'ensemble $C \sqcup D$ avec la fonction de poids $r\colon C \sqcup D \to X$ telle que $r(c) = p(c)$ pour tout $c \in C$, et $r(d) = q(d)$ pour tout $d \in D$.

Au niveau du squelette $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(X)$, nous avons $f \sqcup g = f + g$ et $|\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}| = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}|$.

Enfin,

$$\mathcal{C} \cong \sum_{x \in X} |\mathcal{C}(x)| \cdot 1_x = |\mathcal{C}| \ .$$

La convolution

Supposons que κ soit un cardinal transfini régulier $\leq$ κ et que M soit un monoïde à décompositions $< \kappa$.

La convolution

Supposons que κ soit un cardinal transfini régulier $\leq$ κ et que M soit un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux préfaisceaux $< \kappa$ sur M.

La convolution

Supposons que κ soit un cardinal transfini régulier $\leq$ κ et que M soit un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux préfaisceaux $< \kappa$ sur M. On défini

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})(x) = \bigsqcup_{x_1 x_2 = x} \mathcal{C}(x_1) \times \mathcal{D}(x_2) \ .$$

La convolution

Supposons que κ soit un cardinal transfini régulier $\leq$ κ et que M soit un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux préfaisceaux $< \kappa$ sur M. On défini

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})(x) = \bigsqcup_{x_1 x_2 = x} \mathcal{C}(x_1) \times \mathcal{D}(x_2) \ .$$

Du point de vue des classes pondérées ce tenseur monoïdal admet une description plus simple : $(C, p) \times (D, q) = (C \times D, p \cdot q)$ où l'on a posé $(p \cdot q)(c, d) = p(c)q(d)$ pour chaque $(c, d) \in C \times D$.

La convolution

Supposons que κ soit un cardinal transfini régulier $\leq$ κ et que M soit un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux préfaisceaux $< \kappa$ sur M. On défini

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})(x) = \bigsqcup_{x_1 x_2 = x} \mathcal{C}(x_1) \times \mathcal{D}(x_2) \ .$$

Du point de vue des classes pondérées ce tenseur monoïdal admet une description plus simple : $(C, p) \times (D, q) = (C \times D, p \cdot q)$ où l'on a posé $(p \cdot q)(c, d) = p(c)q(d)$ pour chaque $(c, d) \in C \times D$.

On remarque immédiatement que la restriction de $\times$ aux objets du squelette $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(M)$ correspond au produit de convolution de $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$.

La convolution

Supposons que κ soit un cardinal transfini régulier $\leq$ κ et que M soit un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux préfaisceaux $< \kappa$ sur M. On défini

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})(x) = \bigsqcup_{x_1 x_2 = x} \mathcal{C}(x_1) \times \mathcal{D}(x_2) \ .$$

Du point de vue des classes pondérées ce tenseur monoïdal admet une description plus simple : $(C, p) \times (D, q) = (C \times D, p \cdot q)$ où l'on a posé $(p \cdot q)(c, d) = p(c)q(d)$ pour chaque $(c, d) \in C \times D$.

On remarque immédiatement que la restriction de $\times$ aux objets du squelette $\mathcal{C}ard_{<\kappa}(M)$ correspond au produit de convolution de $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$.

Enfin, $|\mathcal{C} \times \mathcal{D}| = |\mathcal{C}| \times |\mathcal{D}|$ pour tous préfaisceaux $\mathcal{C}, \mathcal{D}$.

Les séries génératrices ordinaires (1/2)

Il est facile de vérifier que $1_{(-)} : x \in M \to 1_x \in \mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$ plonge le monoïde M dans le monoïde multiplicatif sous-jacent à $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$.

Les séries génératrices ordinaires (1/2)

Il est facile de vérifier que $1_{(-)} : x \in M \to 1_x \in \mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$ plonge le monoïde M dans le monoïde multiplicatif sous-jacent à $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]]$.

En termes catégoriques, il s'agit du plongement de Yoneda.

Les séries génératrices ordinaires (2/2)

On remarque que pour $\kappa = \aleph_0$ et $M = \mathbb{N}^{(X)}$, on a

$$|\mathcal{C}| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}} |\mathcal{C}(\mathbf{x}^\alpha)| \mathbf{x}^\alpha$$

où $\mathbf{x}^\alpha = \prod_{x \in X} x^{\alpha(x)}$ représente $1_{\mathbf{x}^\alpha}$.

Les séries génératrices ordinaires (2/2)

On remarque que pour $\kappa = \aleph_0$ et $M = \mathbb{N}^{(X)}$, on a

$$|\mathcal{C}| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}} |\mathcal{C}(\mathbf{x}^\alpha)| \mathbf{x}^\alpha$$

où $\mathbf{x}^\alpha = \prod_{x \in X} x^{\alpha(x)}$ représente $1_{\mathbf{x}^\alpha}$.

Quand X est réduit au seul x, on obtient $|\mathcal{C}| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{C}(x^n)| x^n$.

Définition

Nous supposons encore que $\kappa < \mathrm{\kappa}$ est transfini régulier, et que M est un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Définition

Nous supposons encore que $\kappa < \mathrm{\kappa}$ est transfini régulier, et que M est un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient S un semi-anneau et ϕ une application de la classe des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S.

Définition

Nous supposons encore que $\kappa < \text{κ}$ est transfini régulier, et que M est un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient S un semi-anneau et ϕ une application de la classe des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S.

On dit que ϕ est un invariant de Grothendieck si, et seulement si, pour tous les préfaiscaux $(< \kappa)$ $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,

Définition

Nous supposons encore que $\kappa < \kappa$ est transfini régulier, et que M est un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient S un semi-anneau et ϕ une application de la classe des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S.

On dit que ϕ est un invariant de Grothendieck si, et seulement si, pour tous les préfaisceaux $(< \kappa)$ $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,

1. $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ implique que $\phi(\mathcal{C}) = \phi(\mathcal{D})$;

Définition

Nous supposons encore que $\kappa < \kappa$ est transfini régulier, et que M est un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient S un semi-anneau et ϕ une application de la classe des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S.

On dit que ϕ est un invariant de Grothendieck si, et seulement si, pour tous les préfaiscaux $(< \kappa)$ $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,

1. $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ implique que $\phi(\mathcal{C}) = \phi(\mathcal{D})$;
2. $\phi(\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}) = \phi(\mathcal{C}) + \phi(\mathcal{D})$ et $\phi(0) = 0$;

Définition

Nous supposons encore que $\kappa < \mathrm{\kappa}$ est transfini régulier, et que M est un monoïde à décompositions $< \kappa$.

Soient S un semi-anneau et ϕ une application de la classe des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S.

On dit que ϕ est un invariant de Grothendieck si, et seulement si, pour tous les préfaiscaux $(< \kappa)$ $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,

1. $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ implique que $\phi(\mathcal{C}) = \phi(\mathcal{D})$;
2. $\phi(\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}) = \phi(\mathcal{C}) + \phi(\mathcal{D})$ et $\phi(0) = 0$;
3. $\phi(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \phi(\mathcal{C})\phi(\mathcal{D})$ et $\phi(1_{e_M}) = 1$ où e_M désigne l'identité de M.

$|\cdot|$ est l'invariant de Grothendieck universel

Théorème

Soient S un semi-anneau et ϕ un invariant de Grothendieck des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S.

$|\cdot|$ est l'invariant de Grothendieck universel

Théorème

Soient S un semi-anneau et ϕ un invariant de Grothendieck des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S. Alors il existe un unique homomorphisme de semi-anneaux

$\overline{\phi}$: $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]] \to S$ tel que

$$\overline{\phi} \circ |\cdot| = \phi \ .$$

$|\cdot|$ est l'invariant de Grothendieck universel

Théorème

Soient S un semi-anneau et ϕ un invariant de Grothendieck des objets de $\mathcal{C}_{<\kappa}(M)$ dans S. Alors il existe un unique homomorphisme de semi-anneaux

$\overline{\phi}$: $\mathcal{C}ard_{<\kappa}[[M]] \to S$ tel que

$$\overline{\phi} \circ |\cdot| = \phi \ .$$

Corollaire

Soit S un semi-anneau et ϕ: $S \to \mathcal{O}b(\mathcal{C}_{<\aleph_0}(\mathbb{N}))$ un invariant de Grothendieck. Alors il existe un unique homomorphisme de semi-anneaux $\overline{\phi}$: $\mathbb{N}[[x]] \to S$ tel que

$$\overline{\phi}(\sum_{n \geq 0} c_n x^n) = \phi(\mathcal{C})$$

pour toute classe $\mathcal{C}$ où $c_n = |\mathcal{C}(x^n)|$.

Table des matières

Signatures et algèbres

Supposons que $\kappa \leq \kappa$ soit un cardinal transfini.

Signatures et algèbres

Supposons que $\kappa \leq \kappa$ soit un cardinal transfini.

Soit $\Sigma \in \mathcal{C}_{<\kappa}(\mathbb{N})$ une signature (on suppose donc que pour chaque n, le nombre $|\Sigma(n)|$ de symboles de fonctions d'arité n est $< \kappa$).

Signatures et algèbres

Supposons que $\kappa \leq$ κ soit un cardinal transfini.

Soit $\Sigma \in \mathcal{C}_{<\kappa}(\mathbb{N})$ une signature (on suppose donc que pour chaque n, le nombre $|\Sigma(n)|$ de symboles de fonctions d'arité n est $< \kappa$).

Une Σ-algèbre est la donnée d'un ensemble A et d'une application $F_A(n) \colon \Sigma(n) \to A^{A^n}$ pour chaque entier n.

Signatures et algèbres

Supposons que $\kappa \leq$ ĸ soit un cardinal transfini.

Soit $\Sigma \in \mathcal{C}_{<\kappa}(\mathbb{N})$ une signature (on suppose donc que pour chaque n, le nombre $|\Sigma(n)|$ de symboles de fonctions d'arité n est $< \kappa$).

Une Σ-algèbre est la donnée d'un ensemble A et d'une application $F_A(n)\colon \Sigma(n) \to A^{A^n}$ pour chaque entier n. Un homomorphisme $\phi\colon (A, F_A) \to (B, F_B)$ est une application de A dans B telle que quels que soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \Sigma(n)$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in A^n$,

$$\phi(F_A(n)(f)(a_1, \cdots, a_n)) = F_B(n)(f)(\phi(a_1), \cdots \phi(a_n)) \ .$$

Signatures et algèbres

Supposons que $\kappa \leq$ ĸ soit un cardinal transfini.

Soit $\Sigma \in \mathcal{C}_{<\kappa}(\mathbb{N})$ une signature (on suppose donc que pour chaque n, le nombre $|\Sigma(n)|$ de symboles de fonctions d'arité n est $< \kappa$).

Une Σ-algèbre est la donnée d'un ensemble A et d'une application $F_A(n)\colon \Sigma(n) \to A^{A^n}$ pour chaque entier n. Un homomorphisme $\phi\colon (A, F_A) \to (B, F_B)$ est une application de A dans B telle que quels que soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \Sigma(n)$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in A^n$,

$$\phi(F_A(n)(f)(a_1, \cdots, a_n)) = F_B(n)(f)(\phi(a_1), \cdots \phi(a_n)) .$$

Par exemple, $\mathbb{N}$ est équipé d'une structure de Σ-algèbre donnée par :

$$F_{\mathbb{N}}(n)(f)(k_1, \cdots, k_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} k_i \text{ pour tout } f \in \Sigma(n).$$

Algèbres pondérées

Soient (A, F_A) une Σ-algèbre et $p\colon A \to \mathbb{N}$ une fonction de poids de sorte que (A, p) soit une classe pondérée $< \kappa$.

Algèbres pondérées

Soient (A, F_A) une Σ-algèbre et $p\colon A \to \mathbb{N}$ une fonction de poids de sorte que (A, p) soit une classe pondérée $< \kappa$.

On dit que $((A, F_A), p)$ est une Σ-algèbre pondérée $< \kappa$ si, et seulement si, $p\colon (A, F_A) \to (\mathbb{N}, F_{\mathbb{N}})$ est un homomorphisme de Σ-algèbres.

Algèbres pondérées

Soient (A, F_A) une Σ-algèbre et $p \colon A \to \mathbb{N}$ une fonction de poids de sorte que (A, p) soit une classe pondérée $< \kappa$.

On dit que $((A, F_A), p)$ est une Σ-algèbre pondérée $< \kappa$ si, et seulement si, $p \colon (A, F_A) \to (\mathbb{N}, F_{\mathbb{N}})$ est un homomorphisme de Σ-algèbres.

Un homomorphisme $\phi \colon ((A, F_A), p) \to ((B, F_B), q)$ de Σ-algèbres pondérées ($< \kappa$) est un homomorphisme de Σ-algèbres qui est également un morphisme de classes pondérées.

Algèbres pondérées libres

Théorème

Supposons que $\Sigma(0) = \emptyset$.

Algèbres pondérées libres

Théorème

Supposons que $\Sigma(0) = \emptyset$. Soit (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ telle que $p^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Algèbres pondérées libres

Théorème

Supposons que $\Sigma(0) = \emptyset$. Soit (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ telle que $p^{-1}(\{ 0 \}) = \emptyset$.

Alors $(\Sigma[C], \widehat{p})$ est l'algèbre pondérée libre sur (C, p) où $\Sigma[C]$ est la Σ-algèbre libre sur C et $\widehat{p}\colon \Sigma[C] \to \mathbb{N}$ est l'unique homomorphisme de Σ-algèbres étendant $p\colon C \to \mathbb{N}$.

Algèbres pondérées libres

Théorème

Supposons que $\Sigma(0) = \emptyset$. Soit (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ telle que $p^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Alors $(\Sigma[C], \widehat{p})$ est l'algèbre pondérée libre sur (C, p) où $\Sigma[C]$ est la Σ-algèbre libre sur C et $\widehat{p} \colon \Sigma[C] \to \mathbb{N}$ est l'unique homomorphisme de Σ-algèbres étendant $p \colon C \to \mathbb{N}$.

Exemple

Soient $\Sigma(n) = \{ \bullet_n \}$ pour tout $n > 0$ et $\Sigma(0) = \emptyset$.

Algèbres pondérées libres

Théorème

Supposons que $\Sigma(0) = \emptyset$. Soit (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ telle que $p^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Alors $(\Sigma[C], \widehat{p})$ est l'algèbre pondérée libre sur (C, p) où $\Sigma[C]$ est la Σ-algèbre libre sur C et $\widehat{p}\colon \Sigma[C] \to \mathbb{N}$ est l'unique homomorphisme de Σ-algèbres étendant $p\colon C \to \mathbb{N}$.

Exemple

Soient $\Sigma(n) = \{\bullet_n\}$ pour tout $n > 0$ et $\Sigma(0) = \emptyset$. Alors $\Sigma[C]$ est la classe de tous les arbres d'arité strictement positive dont les feuilles sont dans C.

Algèbres pondérées libres

Théorème

Supposons que $\Sigma(0) = \emptyset$. Soit (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ telle que $p^{-1}(\{ 0 \}) = \emptyset$.

Alors $(\Sigma[C], \widehat{p})$ est l'algèbre pondérée libre sur (C, p) où $\Sigma[C]$ est la Σ-algèbre libre sur C et $\widehat{p} \colon \Sigma[C] \to \mathbb{N}$ est l'unique homomorphisme de Σ-algèbres étendant $p \colon C \to \mathbb{N}$.

Exemple

Soient $\Sigma(n) = \{ \bullet_n \}$ pour tout $n > 0$ et $\Sigma(0) = \emptyset$. Alors $\Sigma[C]$ est la classe de tous les arbres d'arité strictement positive dont les feuilles sont dans C.

La fonction de poids est donnée par $\widehat{p}(\bullet_n(t_1, \cdots, t_n)) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \widehat{p}(t_i)$ et

$\widehat{p}(c) = p(c)$ pour tout $c \in C$.

Théorème

Soient κ un cardinal régulier transfini, et (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ (où la fonction de poids p est à valeur dans le monoïde M d'élément neutre 1).

Théorème

Soient κ un cardinal régulier transfini, et (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ (où la fonction de poids p est à valeur dans le monoïde M d'élément neutre 1).

1. Si $\kappa > \aleph_0$, alors $\mathcal{S}eq(C)$ est le monoïde libre (dans la catégorie des classes pondérées) ;

Théorème

Soient κ un cardinal régulier transfini, et (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ (où la fonction de poids p est à valeur dans le monoïde M d'élément neutre 1).

1. Si $\kappa > \aleph_0$, alors $\mathcal{S}eq(C)$ est le monoïde libre (dans la catégorie des classes pondérées) ;
2. Si $\kappa = \aleph_0$, M est localement fini, et si $p^{-1}(\{ 1 \}) = \emptyset$, alors $\mathcal{S}eq(C)$ est le monoïde libre dans la catégories de classes combinatoires.

Théorème

Soient κ un cardinal régulier transfini, et (C, p) une classe pondérée $< \kappa$ (où la fonction de poids p est à valeur dans le monoïde M d'élément neutre 1).

1. Si $\kappa > \aleph_0$, alors $\mathcal{S}eq(C)$ est le monoïde libre (dans la catégorie des classes pondérées) ;
2. Si $\kappa = \aleph_0$, M est localement fini, et si $p^{-1}(\{ 1 \}) = \emptyset$, alors $\mathcal{S}eq(C)$ est le monoïde libre dans la catégories de classes combinatoires.

Remarque : La fonction de poids $\widehat{p}$ de $\mathcal{S}eq(C)$ est définie par $\widehat{p}(c_1, \cdots, c_n) = p(c_1) \cdots p(c_n)$ pour tout $c_i \in C$.

Remarque

La construction précédente peut être généralisée au cas du monoïde commutatif libre

Remarque

La construction précédente peut être généralisée au cas du monoïde commutatif libre et même au cas des monoïdes partiellement commutatifs libres.