Quantification de Weyl du supergroupe de Heisenberg et application à la TQC combinatoire

Axel de Goursac

Université Catholique de Louvain

Coll: P. Bieliavsky, G. Tuynman
arXiv:1011.2370
arXiv:1105.2420

Université de Paris XIII, Mars 2013

Introduction

- Déformation quantique non formelle d'une variété M. $(C^\infty(M), \star)$: algèbre non-commutative.
- Pour un groupe de Lie abélien G, formule de Rieffel $\rightsquigarrow$ déformation de $C^\infty(G)$.
- Formule de déformation universelle: déforme aussi toute algèbre $\mathbf{A}$ sur laquelle G agit (Drinfeld twist).
- point de vue TQC: la théorie ϕ^4 réelle scalaire sur l'espace de Moyal (déformation de $\mathbb{R}^m$) n'est pas renormalisable.

$\Rightarrow$ la formule de Rieffel n'est pas universelle pour la théorie ϕ^4.

But: Trouver une formule universelle pour ϕ^4.
$\rightarrow$ déformation de superespaces.

Introduction

- Déformation quantique non formelle d'une variété M. $(C^\infty(M), \star)$: algèbre non-commutative.
- Pour un groupe de Lie abélien G, formule de Rieffel $\rightsquigarrow$ déformation de $C^\infty(G)$.
- Formule de déformation universelle: déforme aussi toute algèbre $\mathbf{A}$ sur laquelle G agit (Drinfeld twist).
- point de vue TQC: la théorie ϕ^4 réelle scalaire sur l'espace de Moyal (déformation de $\mathbb{R}^m$) n'est pas renormalisable.

$\Rightarrow$ la formule de Rieffel n'est pas universelle pour la théorie ϕ^4.

But: Trouver une formule universelle pour ϕ^4.
$\rightarrow$ déformation de superespaces.

Introduction

- Déformation quantique non formelle d'une variété M. $(C^\infty(M), \star)$: algèbre non-commutative.
- Pour un groupe de Lie abélien G, formule de Rieffel $\rightsquigarrow$ déformation de $C^\infty(G)$.
- Formule de déformation universelle: déforme aussi toute algèbre $\mathbf{A}$ sur laquelle G agit (Drinfeld twist).
- point de vue TQC: la théorie ϕ^4 réelle scalaire sur l'espace de Moyal (déformation de $\mathbb{R}^m$) n'est pas renormalisable.

$\Rightarrow$ la formule de Rieffel n'est pas universelle pour la théorie ϕ^4.

But: Trouver une formule universelle pour ϕ^4.
$\rightarrow$ déformation de superespaces.

Introduction

- Déformation quantique non formelle d'une variété M. $(C^\infty(M), \star)$: algèbre non-commutative.
- Pour un groupe de Lie abélien G, formule de Rieffel $\rightsquigarrow$ déformation de $C^\infty(G)$.
- Formule de déformation universelle: déforme aussi toute algèbre $\mathbf{A}$ sur laquelle G agit (Drinfeld twist).
- point de vue TQC: la théorie ϕ^4 réelle scalaire sur l'espace de Moyal (déformation de $\mathbb{R}^m$) n'est pas renormalisable.

$\Rightarrow$ la formule de Rieffel n'est pas universelle pour la théorie ϕ^4.

But: Trouver une formule universelle pour ϕ^4.
$\rightarrow$ déformation de superespaces.

Introduction

- Déformation quantique non formelle d'une variété M. $(C^\infty(M), \star)$: algèbre non-commutative.
- Pour un groupe de Lie abélien G, formule de Rieffel $\rightsquigarrow$ déformation de $C^\infty(G)$.
- Formule de déformation universelle: déforme aussi toute algèbre $\mathbf{A}$ sur laquelle G agit (Drinfeld twist).
- point de vue TQC: la théorie ϕ^4 réelle scalaire sur l'espace de Moyal (déformation de $\mathbb{R}^m$) n'est pas renormalisable.

$\Rightarrow$ la formule de Rieffel n'est pas universelle pour la théorie ϕ^4.

But: Trouver une formule universelle pour ϕ^4.
$\rightarrow$ déformation de superespaces.

Introduction

- Déformation quantique non formelle d'une variété M. $(C^\infty(M), \star)$: algèbre non-commutative.
- Pour un groupe de Lie abélien G, formule de Rieffel $\rightsquigarrow$ déformation de $C^\infty(G)$.
- Formule de déformation universelle: déforme aussi toute algèbre $\mathbf{A}$ sur laquelle G agit (Drinfeld twist).
- point de vue TQC: la théorie ϕ^4 réelle scalaire sur l'espace de Moyal (déformation de $\mathbb{R}^m$) n'est pas renormalisable.

$\Rightarrow$ la formule de Rieffel n'est pas universelle pour la théorie ϕ^4.

But: Trouver une formule universelle pour ϕ^4.

$\rightarrow$ déformation de superespaces.

Introduction

- Déformation quantique non formelle d'une variété M. $(C^\infty(M), \star)$: algèbre non-commutative.
- Pour un groupe de Lie abélien G, formule de Rieffel $\rightsquigarrow$ déformation de $C^\infty(G)$.
- Formule de déformation universelle: déforme aussi toute algèbre $\mathbf{A}$ sur laquelle G agit (Drinfeld twist).
- point de vue TQC: la théorie ϕ^4 réelle scalaire sur l'espace de Moyal (déformation de $\mathbb{R}^m$) n'est pas renormalisable.

$\Rightarrow$ la formule de Rieffel n'est pas universelle pour la théorie ϕ^4.

But: Trouver une formule universelle pour ϕ^4.
$\rightarrow$ déformation de superespaces.

Plan

Plan

1. Notions de supergeometrie
2. Déformation quantique
3. Formule de déformation universelle
4. Application à la renormalisation

Plan

1. Notions de supergeometrie
2. Déformation quantique
3. Formule de déformation universelle
4. Application à la renormalisation

Plan

Superalgèbre

- Essence de l'approche concrète de la supergeometrie: remplacer corps $\mathbb{R}$ par une algèbre supercommutative réelle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \simeq \Lambda V = \mathbb{R} \oplus$ nilpotents $\qquad ab = (-1)^{|a||b|} ba$
- Espace vectoriel $\rightarrow$ $\mathcal{A}$-module gradué libre $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{E}_1$

  $(\mathcal{A}_i \mathbf{E}_j \subset \mathbf{E}_{i+j})$

  dim $m|n$: $\mathbf{E}_0 \simeq (\mathcal{A}_0)^m \times (\mathcal{A}_1)^n =: \mathbb{R}^{m|n}$
- Forme symplectique paire: $\omega : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{A}$ bilinéaire, non-dégénérée, superantisymétrique: $\omega(x, y) = -(-1)^{|x||y|}\omega(y, x)$
- Il existe une base homogène de $\mathbf{E}$ telle que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad m|(n_+ + n_-)$$

Superalgèbre

- Essence de l'approche concrète de la supergeometrie: remplacer corps $\mathbb{R}$ par une algèbre supercommutative réelle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \simeq \Lambda V = \mathbb{R} \oplus$ nilpotents $\quad ab = (-1)^{|a||b|} ba$
- Espace vectoriel $\rightarrow$ $\mathcal{A}$-module gradué libre $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{E}_1$

  $(\mathcal{A}_i \mathbf{E}_j \subset \mathbf{E}_{i+j})$

  dim $m|n$: $\mathbf{E}_0 \simeq (\mathcal{A}_0)^m \times (\mathcal{A}_1)^n =: \mathbb{R}^{m|n}$
- Forme symplectique paire: $\omega : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{A}$ bilinéaire, non-dégénérée, superantisymétrique: $\omega(x,y) = -(-1)^{|x||y|}\omega(y,x)$
- Il existe une base homogène de $\mathbf{E}$ telle que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad m|(n_+ + n_-)$$

Superalgèbre

- Essence de l'approche concrète de la supergeometrie: remplacer corps $\mathbb{R}$ par une algèbre supercommutative réelle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \simeq \Lambda V = \mathbb{R} \oplus$ nilpotents $\quad ab = (-1)^{|a||b|} ba$
- Espace vectoriel $\to$ $\mathcal{A}$-module gradué libre $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{E}_1$
  $(\mathcal{A}_i \mathbf{E}_j \subset \mathbf{E}_{i+j})$
  dim $m|n$: $\mathbf{E}_0 \simeq (\mathcal{A}_0)^m \times (\mathcal{A}_1)^n =: \mathbb{R}^{m|n}$
- Forme symplectique paire: $\omega : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathcal{A}$ bilinéaire, non-dégénérée, superantisymétrique: $\omega(x, y) = -(-1)^{|x||y|}\omega(y, x)$
- Il existe une base homogène de $\mathbf{E}$ telle que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad m|(n_+ + n_-)$$

Superalgèbre

- Essence de l'approche concrète de la supergeometrie: remplacer corps $\mathbb{R}$ par une algèbre supercommutative réelle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \simeq \Lambda V = \mathbb{R} \oplus$ nilpotents $\quad ab = (-1)^{|a||b|} ba$
- Espace vectoriel $\to$ $\mathcal{A}$-module gradué libre $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{E}_1$ $(\mathcal{A}_i \mathbf{E}_j \subset \mathbf{E}_{i+j})$
  dim $m|n$: $\mathbf{E}_0 \simeq (\mathcal{A}_0)^m \times (\mathcal{A}_1)^n =: \mathbb{R}^{m|n}$
- Forme symplectique paire: $\omega : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathcal{A}$ bilinéaire, non-dégénérée, superantisymétrique: $\omega(x, y) = -(-1)^{|x||y|}\omega(y, x)$
- Il existe une base homogène de $\mathbf{E}$ telle que

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad m|(n_+ + n_-)$$

Superalgèbre

- Essence de l'approche concrète de la supergeometrie: remplacer corps $\mathbb{R}$ par une algèbre supercommutative réelle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \simeq \Lambda V = \mathbb{R} \oplus$ nilpotents $\quad ab = (-1)^{|a||b|} ba$
- Espace vectoriel $\to$ $\mathcal{A}$-module gradué libre $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{E}_1$ $(\mathcal{A}_i \mathbf{E}_j \subset \mathbf{E}_{i+j})$
  dim $m|n$: $\mathbf{E}_0 \simeq (\mathcal{A}_0)^m \times (\mathcal{A}_1)^n =: \mathbb{R}^{m|n}$
- Forme symplectique paire: $\omega : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathcal{A}$ bilinéaire, non-dégénérée, superantisymétrique: $\omega(x, y) = -(-1)^{|x||y|} \omega(y, x)$
- Il existe une base homogène de $\mathbf{E}$ telle que

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad m|(n_+ + n_-)$$

Superalgèbre

- Essence de l'approche concrète de la supergeometrie: remplacer corps $\mathbb{R}$ par une algèbre supercommutative réelle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \simeq \Lambda V = \mathbb{R} \oplus$ nilpotents $\quad ab = (-1)^{|a||b|} ba$
- Espace vectoriel $\rightarrow$ $\mathcal{A}$-module gradué libre $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{E}_1$ $(\mathcal{A}_i \mathbf{E}_j \subset \mathbf{E}_{i+j})$
  dim $m|n$: $\mathbf{E}_0 \simeq (\mathcal{A}_0)^m \times (\mathcal{A}_1)^n =: \mathbb{R}^{m|n}$
- Forme symplectique paire: $\omega : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{A}$ bilinéaire, non-dégénérée, superantisymétrique: $\omega(x, y) = -(-1)^{|x||y|}\omega(y, x)$
- Il existe une base homogène de $\mathbf{E}$ telle que

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad m|(n_+ + n_-)$$

Supervariétés

- Application "body" $\mathbb{B} : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathbb{R}^m$ (enlève nilpotents)
- Topologie de DeWitt: $U \subset \mathbb{R}^{m|n}$ ouvert si $\mathbb{B}U$ est ouvert et $U = \mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}U)$
- Fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathcal{A}$ if $\exists f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $(I \subset \{1, .., n\})$ $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{m|n}$, $(\xi^I = \prod_{i \in I} \xi^i)$

$$f(x, \xi) = \sum_I \tilde{f}_I(x) \xi^I$$

- Supervariété M de dim $m|n$: espace topologique muni d'une collection de cartes (dans $\mathbb{R}^{m|n}$) telle que les fonctions de transition sont lisses et $\mathbb{B}M$ est une variété.
- Supervariété triviale: système global de coordonnées impaires

Supervariétés

- Application "body" $\mathbb{B} : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathbb{R}^m$ (enlève nilpotents)
- Topologie de DeWitt: $U \subset \mathbb{R}^{m|n}$ ouvert si $\mathbb{B}U$ est ouvert et $U = \mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}U)$
- Fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathcal{A}$ if $\exists f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $(I \subset \{1, .., n\})$ $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{m|n}$, $(\xi^I = \prod_{i \in I} \xi^i)$

$$f(x, \xi) = \sum_I \tilde{f}_I(x)\xi^I$$

- Supervariété M de dim $m|n$: espace topologique muni d'une collection de cartes (dans $\mathbb{R}^{m|n}$) telle que les fonctions de transition sont lisses et $\mathbb{B}M$ est une variété.
- Supervariété triviale: système global de coordonnées impaires

Supervariétés

- Application "body" $\mathbb{B} : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathbb{R}^m$ (enlève nilpotents)
- Topologie de DeWitt: $U \subset \mathbb{R}^{m|n}$ ouvert si $\mathbb{B}U$ est ouvert et $U = \mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}U)$
- Fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathcal{A}$ if $\exists f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $(I \subset \{1, .., n\})$ $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{m|n}$, $(\xi^I = \prod_{i \in I} \xi^i)$

$$f(x,\xi) = \sum_I \tilde{f}_I(x)\xi^I$$

- Supervariété M de dim $m|n$: espace topologique muni d'une collection de cartes (dans $\mathbb{R}^{m|n}$) telle que les fonctions de transition sont lisses et $\mathbb{B}M$ est une variété.
- Supervariété triviale: système global de coordonnées impaires

Supervariétés

- Application "body" $\mathbb{B} : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathbb{R}^m$ (enlève nilpotents)
- Topologie de DeWitt: $U \subset \mathbb{R}^{m|n}$ ouvert si $\mathbb{B}U$ est ouvert et $U = \mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}U)$
- Fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathcal{A}$ if $\exists f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $(I \subset \{1, .., n\})$ $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{m|n}$, $(\xi^I = \prod_{i \in I} \xi^i)$

$$f(x, \xi) = \sum_I \tilde{f}_I(x) \xi^I$$

- Supervariété M de dim $m|n$: espace topologique muni d'une collection de cartes (dans $\mathbb{R}^{m|n}$) telle que les fonctions de transition sont lisses et $\mathbb{B}M$ est une variété.
- Supervariété triviale: système global de coordonnées impaires

Supervariétés

- Application "body" $\mathbb{B} : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathbb{R}^m$ (enlève nilpotents)
- Topologie de DeWitt: $U \subset \mathbb{R}^{m|n}$ ouvert si $\mathbb{B}U$ est ouvert et $U = \mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}U)$
- Fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathcal{A}$ if $\exists f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $(I \subset \{1, .., n\})$ $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{m|n}$, $(\xi^I = \prod_{i \in I} \xi^i)$

$$f(x, \xi) = \sum_I \tilde{f}_I(x) \xi^I$$

- Supervariété M de dim $m|n$: espace topologique muni d'une collection de cartes (dans $\mathbb{R}^{m|n}$) telle que les fonctions de transition sont lisses et $\mathbb{B}M$ est une variété.
- Supervariété triviale: système global de coordonnées impaires

Fonctions d'une supervariété triviale

- Pour M une supervariété triviale, fonctions lisses complexes: $C^\infty(M) \simeq C^\infty(\mathbb{B}M) \otimes \bigwedge \mathbb{R}^n$.
- Intégration de Berezin: $\int d\xi\ f(x,\xi) = f_{\{1,..,n\}}(x)$
- Produit: $\xi^I \xi^J = \varepsilon(I,J)\xi^{I\cup J}$
- Produit scalaire superhermitien:

$$\langle f,g\rangle = \int dx d\xi\ \overline{f(x,\xi)} g(x,\xi) = \sum_I \varepsilon(I,\complement I) \int dx \overline{f_I(x)} g_{\complement I}(x)$$

- Opération de Hodge: $*\xi^I = \varepsilon(I,\complement I)\xi^{\complement I}$
- Produit scalaire hermitien défini positif:

$$(f,g) = \int dx d\xi\ \overline{f(x,\xi)} (*g)(x,\xi) = \sum_I \int dx \overline{f_I(x)} g_I(x)$$

$\to L^2(M)$: complétion, espace de Hilbert.

Fonctions d'une supervariété triviale

- Pour M une supervariété triviale, fonctions lisses complexes: $C^\infty(M) \simeq C^\infty(\mathbb{B}M) \otimes \bigwedge \mathbb{R}^n$.
- Intégration de Berezin: $\int d\xi \; f(x,\xi) = f_{\{1,..,n\}}(x)$
- Produit: $\xi^I \xi^J = \varepsilon(I,J)\xi^{I\cup J}$
- Produit scalaire superhermitien:

$$\langle f, g\rangle = \int dx d\xi \; \overline{f(x,\xi)} g(x,\xi) = \sum_I \varepsilon(I, \complement I) \int dx \overline{f_I(x)} g_{\complement I}(x)$$

- Opération de Hodge: $*\xi^I = \varepsilon(I, \complement I)\xi^{\complement I}$
- Produit scalaire hermitien défini positif:

$$(f, g) = \int dx d\xi \; \overline{f(x,\xi)} (*g)(x,\xi) = \sum_I \int dx \overline{f_I(x)} g_I(x)$$

$\rightarrow$ $L^2(M)$: complétion, espace de Hilbert.

Fonctions d'une supervariété triviale

- Pour M une supervariété triviale, fonctions lisses complexes: $C^\infty(M) \simeq C^\infty(\mathbb{B}M) \otimes \bigwedge \mathbb{R}^n$.
- Intégration de Berezin: $\int \mathrm{d}\xi \; f(x,\xi) = f_{\{1,..,n\}}(x)$
- Produit: $\xi^I \xi^J = \varepsilon(I,J)\xi^{I\cup J}$
- Produit scalaire superhermitien:

$$\langle f, g\rangle = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \; \overline{f(x,\xi)} g(x,\xi) = \sum_I \varepsilon(I, \complement I) \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_{\complement I}(x)$$

- Opération de Hodge: $*\xi^I = \varepsilon(I, \complement I)\xi^{\complement I}$
- Produit scalaire hermitien défini positif:

$$(f, g) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \; \overline{f(x,\xi)}(*g)(x,\xi) = \sum_I \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_I(x)$$

$\to$ $L^2(M)$: complétion, espace de Hilbert.

Fonctions d'une supervariété triviale

- Pour M une supervariété triviale, fonctions lisses complexes: $C^\infty(M) \simeq C^\infty(\mathbb{B}M) \otimes \bigwedge \mathbb{R}^n$.
- Intégration de Berezin: $\int d\xi \; f(x,\xi) = f_{\{1,..,n\}}(x)$
- Produit: $\xi^I \xi^J = \varepsilon(I,J)\xi^{I\cup J}$
- Produit scalaire superhermitien:

$$\langle f, g\rangle = \int dx d\xi \; \overline{f(x,\xi)} g(x,\xi) = \sum_I \varepsilon(I, \complement I) \int dx \overline{f_I(x)} g_{\complement I}(x)$$

- Opération de Hodge: $*\xi^I = \varepsilon(I, \complement I)\xi^{\complement I}$
- Produit scalaire hermitien défini positif:

$$(f, g) = \int dx d\xi \; \overline{f(x,\xi)} (*g)(x,\xi) = \sum_I \int dx \overline{f_I(x)} g_I(x)$$

$\rightarrow$ $L^2(M)$: complétion, espace de Hilbert.

Fonctions d'une supervariété triviale

- Pour M une supervariété triviale, fonctions lisses complexes: $C^\infty(M) \simeq C^\infty(\mathbb{B}M) \otimes \bigwedge \mathbb{R}^n$.
- Intégration de Berezin: $\int \mathrm{d}\xi \; f(x,\xi) = f_{\{1,..,n\}}(x)$
- Produit: $\xi^I \xi^J = \varepsilon(I,J)\xi^{I\cup J}$
- Produit scalaire superhermitien:

$$\langle f, g\rangle = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\, \overline{f(x,\xi)}g(x,\xi) = \sum_I \varepsilon(I, \complement I) \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_{\complement I}(x)$$

- Opération de Hodge: $*\xi^I = \varepsilon(I, \complement I)\xi^{\complement I}$
- Produit scalaire hermitien défini positif:

$$(f, g) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\, \overline{f(x,\xi)}(*g)(x,\xi) = \sum_I \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_I(x)$$

$\to$ $L^2(M)$: complétion, espace de Hilbert.

Fonctions d'une supervariété triviale

- Pour M une supervariété triviale, fonctions lisses complexes: $C^\infty(M) \simeq C^\infty(\mathbb{B}M) \otimes \bigwedge \mathbb{R}^n$.
- Intégration de Berezin: $\int \mathrm{d}\xi \; f(x,\xi) = f_{\{1,..,n\}}(x)$
- Produit: $\xi^I \xi^J = \varepsilon(I,J)\xi^{I\cup J}$
- Produit scalaire superhermitien:

$$\langle f,g\rangle = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \; \overline{f(x,\xi)}g(x,\xi) = \sum_I \varepsilon(I,\complement I) \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_{\complement I}(x)$$

- Opération de Hodge: $*\xi^I = \varepsilon(I,\complement I)\xi^{\complement I}$
- Produit scalaire hermitien défini positif:

$$(f,g) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \; \overline{f(x,\xi)}(*g)(x,\xi) = \sum_I \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_I(x)$$

$\rightarrow$ $L^2(M)$: complétion, espace de Hilbert.

Fonctions d'une supervariété triviale

- Pour M une supervariété triviale, fonctions lisses complexes: $C^\infty(M) \simeq C^\infty(\mathbb{B}M) \otimes \bigwedge \mathbb{R}^n$.
- Intégration de Berezin: $\int \mathrm{d}\xi\ f(x,\xi) = f_{\{1,..,n\}}(x)$
- Produit: $\xi^I \xi^J = \varepsilon(I,J)\xi^{I\cup J}$
- Produit scalaire superhermitien:

$$\langle f, g\rangle = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\, \overline{f(x,\xi)}g(x,\xi) = \sum_I \varepsilon(I, \complement I) \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_{\complement I}(x)$$

- Opération de Hodge: $*\xi^I = \varepsilon(I, \complement I)\xi^{\complement I}$
- Produit scalaire hermitien défini positif:

$$(f, g) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\, \overline{f(x,\xi)}(*g)(x,\xi) = \sum_I \int \mathrm{d}x \overline{f_I(x)} g_I(x)$$

$\rightarrow$ $L^2(M)$: complétion, espace de Hilbert.

Supergroupe de Heisenberg

- Superalgèbre de Heisenberg: $\mathcal{A}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{E} \oplus \mathcal{A}Z$, avec $\mathbf{E}$: $\mathcal{A}$-module gradué libre de dim $m|n$, Z: générateur pair et ω: forme symplectique paire sur $\mathbf{E}$

$$\Big[(x_1, \xi_1, a_1), (x_2, \xi_2, a_2)\Big] = (0, 0, \omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$
$$= (0, 0, \omega_0(x_1, x_2) + \xi_1 \xi_2)$$

- exp: $\mathfrak{g}_0 \to G \simeq \mathbb{R}^{m|n} \times \mathbb{R}^{1|0} Z$: supergroupe de Heisenberg

(trivial)

$$(x_1, \xi_1, a_1) \cdot (x_2, \xi_2, a_2) =$$
$$(x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, a_1 + a_2 + \frac{1}{2}\omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$

Non-abélien, élément neutre: 0, $(x + aZ)^{-1} = -x - aZ$.

- Quotient: $M = G/\mathbb{R}^{1|0} Z \simeq \mathbb{R}^{m|n}$ supergroupe abélien.

Supergroupe de Heisenberg

- Superalgèbre de Heisenberg: $\mathcal{A}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{E} \oplus \mathcal{A}Z$, avec $\mathbf{E}$: $\mathcal{A}$-module gradué libre de dim $m|n$, Z: générateur pair et ω: forme symplectique paire sur $\mathbf{E}$

$$\Big[(x_1, \xi_1, a_1), (x_2, \xi_2, a_2)\Big] = (0, 0, \omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$
$$= (0, 0, \omega_0(x_1, x_2) + \xi_1\xi_2)$$

- exp: $\mathfrak{g}_0 \to G \simeq \mathbb{R}^{m|n} \times \mathbb{R}^{1|0} Z$: supergroupe de Heisenberg

(trivial)

$$(x_1, \xi_1, a_1) \cdot (x_2, \xi_2, a_2) =$$
$$(x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, a_1 + a_2 + \frac{1}{2}\omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$

Non-abélien, élément neutre: 0, $(x + aZ)^{-1} = -x - aZ$.

- Quotient: $M = G/\mathbb{R}^{1|0} Z \simeq \mathbb{R}^{m|n}$ supergroupe abélien.

Supergroupe de Heisenberg

- Superalgèbre de Heisenberg: $\mathcal{A}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{E} \oplus \mathcal{A}Z$, avec $\mathbf{E}$: $\mathcal{A}$-module gradué libre de dim $m|n$, Z: générateur pair et ω: forme symplectique paire sur $\mathbf{E}$

$$\Big[(x_1, \xi_1, a_1), (x_2, \xi_2, a_2)\Big] = (0, 0, \omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2))) \\ = (0, 0, \omega_0(x_1, x_2) + \xi_1 \xi_2)$$

- exp: $\mathfrak{g}_0 \to G \simeq \mathbb{R}^{m|n} \times \mathbb{R}^{1|0} Z$: supergroupe de Heisenberg

(trivial)

$$(x_1, \xi_1, a_1) \cdot (x_2, \xi_2, a_2) = \\ (x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, a_1 + a_2 + \frac{1}{2} \omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$

Non-abélien, élément neutre: 0, $(x + aZ)^{-1} = -x - aZ$.

- Quotient: $M = G/\mathbb{R}^{1|0} Z \simeq \mathbb{R}^{m|n}$ supergroupe abélien.

Supergroupe de Heisenberg

- Superalgèbre de Heisenberg: $\mathcal{A}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{E} \oplus \mathcal{A}Z$, avec $\mathbf{E}$: $\mathcal{A}$-module gradué libre de dim $m|n$, Z: générateur pair et ω: forme symplectique paire sur $\mathbf{E}$

$$\left[(x_1, \xi_1, a_1), (x_2, \xi_2, a_2)\right] = (0, 0, \omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$
$$= (0, 0, \omega_0(x_1, x_2) + \xi_1 \xi_2)$$

- exp: $\mathfrak{g}_0 \to G \simeq \mathbb{R}^{m|n} \times \mathbb{R}^{1|0} Z$: supergroupe de Heisenberg

(trivial)

$$(x_1, \xi_1, a_1) \cdot (x_2, \xi_2, a_2) =$$
$$(x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, a_1 + a_2 + \frac{1}{2}\omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$

Non-abélien, élément neutre: 0, $(x + aZ)^{-1} = -x - aZ$.

- Quotient: $M = G/\mathbb{R}^{1|0} Z \simeq \mathbb{R}^{m|n}$ supergroupe abélien.

Supergroupe de Heisenberg

- Superalgèbre de Heisenberg: $\mathcal{A}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{E} \oplus \mathcal{A}Z$, avec $\mathbf{E}$: $\mathcal{A}$-module gradué libre de dim $m|n$, Z: générateur pair et ω: forme symplectique paire sur $\mathbf{E}$

$$\left[(x_1, \xi_1, a_1), (x_2, \xi_2, a_2)\right] = (0, 0, \omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2))) = (0, 0, \omega_0(x_1, x_2) + \xi_1\xi_2)$$

- exp: $\mathfrak{g}_0 \to G \simeq \mathbb{R}^{m|n} \times \mathbb{R}^{1|0}Z$: supergroupe de Heisenberg

(trivial)

$$(x_1, \xi_1, a_1)\cdot(x_2, \xi_2, a_2) = (x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, a_1 + a_2 + \frac{1}{2}\omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$

Non-abélien, élément neutre: 0, $(x + aZ)^{-1} = -x - aZ$.

- Quotient: $M = G/\mathbb{R}^{1|0}Z \simeq \mathbb{R}^{m|n}$ supergroupe abélien.

Supergroupe de Heisenberg

- Superalgèbre de Heisenberg: $\mathcal{A}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{E} \oplus \mathcal{A}Z$, avec $\mathbf{E}$: $\mathcal{A}$-module gradué libre de dim $m|n$, Z: générateur pair et ω: forme symplectique paire sur $\mathbf{E}$

$$\Big[(x_1, \xi_1, a_1), (x_2, \xi_2, a_2)\Big] = (0, 0, \omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$
$$= (0, 0, \omega_0(x_1, x_2) + \xi_1 \xi_2)$$

- exp: $\mathfrak{g}_0 \to G \simeq \mathbb{R}^{m|n} \times \mathbb{R}^{1|0} Z$: supergroupe de Heisenberg

(trivial)

$$(x_1, \xi_1, a_1) \cdot (x_2, \xi_2, a_2) =$$
$$(x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, a_1 + a_2 + \frac{1}{2}\omega((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)))$$

Non-abélien, élément neutre: 0, $(x + aZ)^{-1} = -x - aZ$.

- Quotient: $M = G/\mathbb{R}^{1|0} Z \simeq \mathbb{R}^{m|n}$ supergroupe abélien.

Application de quantification

(Kirillov '76, Bieliavsky Gayral '11)

- Choix d'une polarisation (de dim $\frac{m}{2}+1|0$) dans **E** et méthode des orbites de Kirillov.

$\rightarrow$ Représentation de Schrödinger U (induite) de G

- Généralisation de la quantification de Weyl (structure symétrique):

$$\Omega : L^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n})), \qquad \int f(z)U(z)\sigma^* U(z)^{-1} dz$$

- Espace $\mathcal{B}$ de Schwartz:

$$\mathcal{B}^1(M) = \{f \in C^\infty(M), \forall D^\alpha, \|f\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbb{B}M} \sum_I |D^\alpha f_I(x)| < \infty\}$$

- Extension de l'application de quantification (intégrales oscillantes):

$$\Omega : \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n}))$$

Application de quantification

(Kirillov '76, Bieliavsky Gayral '11)

- Choix d'une polarisation (de dim $\frac{m}{2}+1|0$) dans **E** et méthode des orbites de Kirillov.

$\rightarrow$ Représentation de Schrödinger U (induite) de G

- Généralisation de la quantification de Weyl (structure symétrique):

$$\Omega : L^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n})), \qquad \int f(z)U(z)\sigma^* U(z)^{-1} \mathrm{d}z$$

- Espace $\mathcal{B}$ de Schwartz:

$$\mathcal{B}^1(M) = \{f \in C^\infty(M), \forall D^\alpha, \|f\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbb{B}M} \sum_I |D^\alpha f_I(x)| < \infty\}$$

- Extension de l'application de quantification (intégrales oscillantes):

$$\Omega : \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n}))$$

Application de quantification

(Kirillov '76, Bieliavsky Gayral '11)

- Choix d'une polarisation (de dim $\frac{m}{2}+1|0$) dans **E** et méthode des orbites de Kirillov.

$\rightarrow$ Représentation de Schrödinger U (induite) de G

- Généralisation de la quantification de Weyl (structure symétrique):

$$\Omega : L^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n})), \qquad \int f(z)U(z)\sigma^* U(z)^{-1} \mathrm{d}z$$

- Espace $\mathcal{B}$ de Schwartz:

$$\mathcal{B}^1(M) = \{f \in C^\infty(M), \forall D^\alpha, \|f\|_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{B}M} \sum_I |D^\alpha f_I(x)| < \infty\}$$

- Extension de l'application de quantification (intégrales oscillantes):

$$\Omega : \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n}))$$

Application de quantification

(Kirillov '76, Bieliavsky Gayral '11)

- Choix d'une polarisation (de dim $\frac{m}{2}+1|0$) dans **E** et méthode des orbites de Kirillov.

$\rightarrow$ Représentation de Schrödinger U (induite) de G

- Généralisation de la quantification de Weyl (structure symétrique):

$$\Omega : L^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n})), \qquad \int f(z)U(z)\sigma^* U(z)^{-1} \mathrm{d}z$$

- Espace $\mathcal{B}$ de Schwartz:

$$\mathcal{B}^1(M) = \{f \in C^\infty(M), \forall D^\alpha, \|f\|_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{B}M} \sum_I |D^\alpha f_I(x)| < \infty\}$$

- Extension de l'application de quantification (intégrales oscillantes):

$$\Omega : \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n}))$$

Application de quantification

(Kirillov '76, Bieliavsky Gayral '11)

- Choix d'une polarisation (de dim $\frac{m}{2}+1|0$) dans **E** et méthode des orbites de Kirillov.

$\rightarrow$ Représentation de Schrödinger U (induite) de G

- Généralisation de la quantification de Weyl (structure symétrique):

$$\Omega : L^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n})), \qquad \int f(z)U(z)\sigma^* U(z)^{-1}\mathrm{d}z$$

- Espace $\mathcal{B}$ de Schwartz:

$$\mathcal{B}^1(M) = \{f \in C^\infty(M), \forall D^\alpha, \|f\|_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{B}M} \sum_I |D^\alpha f_I(x)| < \infty\}$$

- Extension de l'application de quantification (intégrales oscillantes):

$$\Omega : \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{m}{2}|n}))$$

Produit déformé

Produit donné par la formule de von Neumann-Rieffel.

$\star : \mathcal{B}^1(M) \times \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}^1(M)$

$$(f \star g)(z) = \kappa \int_{M^2} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \, f(z_1) g(z_2) e^{-2ia_0(\omega(z_1,z_2)+\omega(z_2,z)+\omega(z,z_1))}$$

Proposition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\Omega(f \star g) = \Omega(f)\Omega(g)$
- Ω est injective. $\Rightarrow \star$ est associatif.
- $(\mathcal{B}^1(M), \star) \simeq Cl(n, \mathbb{C}) \otimes (\mathcal{B}^1(\mathbb{B}M), \star)$

Produit déformé

Produit donné par la formule de von Neumann-Rieffel.
$\star : \mathcal{B}^1(M) \times \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}^1(M)$

$$(f \star g)(z) = \kappa \int_{M^2} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \, f(z_1) g(z_2) e^{-2ia_0(\omega(z_1,z_2)+\omega(z_2,z)+\omega(z,z_1))}$$

Proposition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\Omega(f \star g) = \Omega(f)\Omega(g)$
- Ω est injective. $\Rightarrow \star$ est associatif.
- $(\mathcal{B}^1(M), \star) \simeq Cl(n, \mathbb{C}) \otimes (\mathcal{B}^1(\mathbb{B}M), \star)$

Produit déformé

Produit donné par la formule de von Neumann-Rieffel.
$\star : \mathcal{B}^1(M) \times \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}^1(M)$

$$(f \star g)(z) = \kappa \int_{M^2} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \, f(z_1) g(z_2) e^{-2ia_0(\omega(z_1,z_2)+\omega(z_2,z)+\omega(z,z_1))}$$

Proposition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\Omega(f \star g) = \Omega(f)\Omega(g)$
- Ω est injective. $\Rightarrow \star$ est associatif.
- $(\mathcal{B}^1(M), \star) \simeq Cl(n, \mathbb{C}) \otimes (\mathcal{B}^1(\mathbb{B}M), \star)$

Produit déformé

Produit donné par la formule de von Neumann-Rieffel.
$\star : \mathcal{B}^1(M) \times \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}^1(M)$

$$(f \star g)(z) = \kappa \int_{M^2} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2\, f(z_1) g(z_2) e^{-2ia_0(\omega(z_1,z_2)+\omega(z_2,z)+\omega(z,z_1))}$$

Proposition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\Omega(f \star g) = \Omega(f)\Omega(g)$
- Ω est injective. $\Rightarrow \star$ est associatif.
- $(\mathcal{B}^1(M), \star) \simeq Cl(n, \mathbb{C}) \otimes (\mathcal{B}^1(\mathbb{B}M), \star)$

Produit déformé

Produit donné par la formule de von Neumann-Rieffel.
$\star : \mathcal{B}^1(M) \times \mathcal{B}^1(M) \to \mathcal{B}^1(M)$

$$(f \star g)(z) = \kappa \int_{M^2} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \, f(z_1) g(z_2) e^{-2ia_0(\omega(z_1,z_2)+\omega(z_2,z)+\omega(z,z_1))}$$

Proposition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\Omega(f \star g) = \Omega(f)\Omega(g)$
- Ω est injective. $\Rightarrow \star$ est associatif.
- $(\mathcal{B}^1(M), \star) \simeq Cl(n, \mathbb{C}) \otimes (\mathcal{B}^1(\mathbb{B}M), \star)$

Universalité pour les algèbres de Fréchet

- Soit $(\mathbf{A}, \|\cdot\|_j)$ une algèbre de Fréchet.

$\rightarrow$ Produit déformé sur $\mathcal{B}^1(M)$ peut être étendu à $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.

- Soit $\rho : M \times \mathbf{A} \to (\mathbf{A} \otimes \mathcal{A})$ une action de M sur $\mathbf{A}$:

$$\rho_{z_1+z_2} = \rho_{z_1}\rho_{z_2}, \quad \rho_0 = \mathrm{id}, \quad \rho_z(ab) = \rho_z(a)\rho_z(b),$$

$+$ quelques axiomes techniques de continuité...

- Espace des vecteurs lisses $\mathbf{A}^\infty$ est dense dans $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\infty = \{a \in \mathbf{A}, z \mapsto \rho_z(a) \in C^\infty_{\mathbf{A}}(M)\}$$

Théorème (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\forall a \in \mathbf{A}^\infty$, $\rho^a : z \mapsto \rho_z(a)$ est dans $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.
- FDU: $a \star_\rho b := (\rho^a \star \rho^b)(0)$ définit un nouveau produit associatif sur $\mathbf{A}^\infty$.

Universalité pour les algèbres de Fréchet

- Soit $(\mathbf{A}, \|\cdot\|_j)$ une algèbre de Fréchet.

$\rightarrow$ Produit déformé sur $\mathcal{B}^1(M)$ peut être étendu à $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.

- Soit $\rho : M \times \mathbf{A} \to (\mathbf{A} \otimes \mathcal{A})$ une action de M sur $\mathbf{A}$:

$$\rho_{z_1+z_2} = \rho_{z_1}\rho_{z_2}, \quad \rho_0 = \mathrm{id}, \quad \rho_z(ab) = \rho_z(a)\rho_z(b),$$

$+$ quelques axiomes techniques de continuité...

- Espace des vecteurs lisses $\mathbf{A}^\infty$ est dense dans $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\infty = \{a \in \mathbf{A},\, z \mapsto \rho_z(a) \in C^\infty_{\mathbf{A}}(M)\}$$

Théorème (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\forall a \in \mathbf{A}^\infty$, $\rho^a : z \mapsto \rho_z(a)$ est dans $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.
- FDU: $a \star_\rho b := (\rho^a \star \rho^b)(0)$ définit un nouveau produit associatif sur $\mathbf{A}^\infty$.

Universalité pour les algèbres de Fréchet

- Soit $(\mathbf{A}, \|\cdot\|_j)$ une algèbre de Fréchet.

$\rightarrow$ Produit déformé sur $\mathcal{B}^1(M)$ peut être étendu à $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.

- Soit $\rho : M \times \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A} \otimes \mathcal{A})$ une action de M sur $\mathbf{A}$:

$$\rho_{z_1+z_2} = \rho_{z_1}\rho_{z_2}, \quad \rho_0 = \mathrm{id}, \quad \rho_z(ab) = \rho_z(a)\rho_z(b),$$

$+$ quelques axiomes techniques de continuité...

- Espace des vecteurs lisses $\mathbf{A}^\infty$ est dense dans $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\infty = \{a \in \mathbf{A},\ z \mapsto \rho_z(a) \in C^\infty_{\mathbf{A}}(M)\}$$

Théorème (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\forall a \in \mathbf{A}^\infty$, $\rho^a : z \mapsto \rho_z(a)$ est dans $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.
- FDU: $a \star_\rho b := (\rho^a \star \rho^b)(0)$ définit un nouveau produit associatif sur $\mathbf{A}^\infty$.

Universalité pour les algèbres de Fréchet

- Soit $(\mathbf{A}, \|\cdot\|_j)$ une algèbre de Fréchet.

$\rightarrow$ Produit déformé sur $\mathcal{B}^1(M)$ peut être étendu à $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.

- Soit $\rho : M \times \mathbf{A} \to (\mathbf{A} \otimes \mathcal{A})$ une action de M sur $\mathbf{A}$:

$$\rho_{z_1+z_2} = \rho_{z_1}\rho_{z_2}, \quad \rho_0 = \mathrm{id}, \quad \rho_z(ab) = \rho_z(a)\rho_z(b),$$

  $+$ quelques axiomes techniques de continuité...

- Espace des vecteurs lisses $\mathbf{A}^\infty$ est dense dans $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\infty = \{a \in \mathbf{A},\ z \mapsto \rho_z(a) \in C^\infty_{\mathbf{A}}(M)\}$$

Théorème (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\forall a \in \mathbf{A}^\infty$, $\rho^a : z \mapsto \rho_z(a)$ est dans $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.
- FDU: $a \star_\rho b := (\rho^a \star \rho^b)(0)$ définit un nouveau produit associatif sur $\mathbf{A}^\infty$.

Universalité pour les algèbres de Fréchet

- Soit $(\mathbf{A}, \|\cdot\|_j)$ une algèbre de Fréchet.

$\rightarrow$ Produit déformé sur $\mathcal{B}^1(M)$ peut être étendu à $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.

- Soit $\rho : M \times \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A} \otimes \mathcal{A})$ une action de M sur $\mathbf{A}$:

$$\rho_{z_1+z_2} = \rho_{z_1}\rho_{z_2}, \quad \rho_0 = \mathrm{id}, \quad \rho_z(ab) = \rho_z(a)\rho_z(b),$$

$+$ quelques axiomes techniques de continuité...

- Espace des vecteurs lisses $\mathbf{A}^\infty$ est dense dans $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\infty = \{a \in \mathbf{A},\ z \mapsto \rho_z(a) \in C^\infty_{\mathbf{A}}(M)\}$$

Théorème (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\forall a \in \mathbf{A}^\infty$, $\rho^a : z \mapsto \rho_z(a)$ est dans $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.
- FDU: $a \star_\rho b := (\rho^a \star \rho^b)(0)$ définit un nouveau produit associatif sur $\mathbf{A}^\infty$.

Universalité pour les algèbres de Fréchet

- Soit $(\mathbf{A}, \|\cdot\|_j)$ une algèbre de Fréchet.

$\rightarrow$ Produit déformé sur $\mathcal{B}^1(M)$ peut être étendu à $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.

- Soit $\rho : M \times \mathbf{A} \to (\mathbf{A} \otimes \mathcal{A})$ une action de M sur $\mathbf{A}$:

$$\rho_{z_1+z_2} = \rho_{z_1}\rho_{z_2}, \quad \rho_0 = \mathrm{id}, \quad \rho_z(ab) = \rho_z(a)\rho_z(b),$$

$+$ quelques axiomes techniques de continuité...

- Espace des vecteurs lisses $\mathbf{A}^\infty$ est dense dans $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\infty = \{a \in \mathbf{A},\, z \mapsto \rho_z(a) \in C^\infty_{\mathbf{A}}(M)\}$$

Théorème (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

- $\forall a \in \mathbf{A}^\infty$, $\rho^a : z \mapsto \rho_z(a)$ est dans $\mathcal{B}^1_{\mathbf{A}}(M)$.
- FDU: $a \star_\rho b := (\rho^a \star \rho^b)(0)$ définit un nouveau produit associatif sur $\mathbf{A}^\infty$.

Superespace de Hilbert

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Un superespace de Hilbert de parité n est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $(\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, (\cdot,\cdot))$ avec $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) = 0$, muni d'un opérateur unitaire $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de degré n, satisfaisant $J^2(x) = (-1)^{(n+1)|x|}x$.

- Produit scalaire superhermitien: $\langle x, y\rangle := (J(x), y)$
- Superadjoint: $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\exists T^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle T^\dagger(x), y\rangle = (-1)^{|T||x|}\langle x, T(y)\rangle$$

- Exemple: soit X une supervariété triviale de dim $m|n$, $\mathcal{H} = L^2(X)$ est un superespace de Hilbert de parité n, muni de $J = *$, et $(f,g) = \int_M dz\overline{f(z)}(*g)(z)$

Superespace de Hilbert

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Un superespace de Hilbert de parité n est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $(\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, (\cdot, \cdot))$ avec $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) = 0$, muni d'un opérateur unitaire $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de degré n, satisfaisant $J^2(x) = (-1)^{(n+1)|x|}x$.

- Produit scalaire superhermitien: $\langle x, y\rangle := (J(x), y)$
- Superadjoint: $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\exists T^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle T^\dagger(x), y\rangle = (-1)^{|T||x|}\langle x, T(y)\rangle$$

- Exemple: soit X une supervariété triviale de dim $m|n$, $\mathcal{H} = L^2(X)$ est un superespace de Hilbert de parité n, muni de $J = *$, et $(f, g) = \int_M dz\overline{f(z)}(*g)(z)$

Superespace de Hilbert

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Un superespace de Hilbert de parité n est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $(\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, (\cdot, \cdot))$ avec $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) = 0$, muni d'un opérateur unitaire $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de degré n, satisfaisant $J^2(x) = (-1)^{(n+1)|x|}x$.

- Produit scalaire superhermitien: $\langle x, y\rangle := (J(x), y)$
- Superadjoint: $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\exists T^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle T^\dagger(x), y\rangle = (-1)^{|T||x|}\langle x, T(y)\rangle$$

- Exemple: soit X une supervariété triviale de dim $m|n$, $\mathcal{H} = L^2(X)$ est un superespace de Hilbert de parité n, muni de $J = *$, et $(f, g) = \int_M \mathrm{d}z \overline{f(z)}(*g)(z)$

Superespace de Hilbert

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Un superespace de Hilbert de parité n est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $(\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, (\cdot, \cdot))$ avec $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) = 0$, muni d'un opérateur unitaire $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de degré n, satisfaisant $J^2(x) = (-1)^{(n+1)|x|}x$.

- Produit scalaire superhermitien: $\langle x, y \rangle := (J(x), y)$
- Superadjoint: $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\exists T^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle T^\dagger(x), y \rangle = (-1)^{|T||x|} \langle x, T(y) \rangle$$

- Exemple: soit X une supervariété triviale de dim $m|n$, $\mathcal{H} = L^2(X)$ est un superespace de Hilbert de parité n, muni de $J = *$, et $(f, g) = \int_M \mathrm{d}z \overline{f(z)}(*g)(z)$

C*-superalgèbres

Superinvolution sur une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathbf{A}$: $^\dagger : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 0 telle que $(a^\dagger)^\dagger = a$, et $(a \cdot b)^\dagger = (-1)^{|a||b|} b^\dagger \cdot a^\dagger$

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Une C*-superalgèbre est une algèbre de Banach $\mathbb{Z}_2$-graduée superinvolutive $\mathbf{A}$ qui peut être représentée sur un superespace de Hilbert $(\mathcal{H}, J)$ par une représentation isométrique (compatible avec la superinvolution) de degré 0:

$$\varrho : \mathbf{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

- Exemple: $(\mathbf{A} = L^\infty(X), \|f\| = \sum_I \|f_I\|_\infty)$: C*-superalgèbre, représentée par multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(X)$.

$\to$ Notion de superespace non-commutatif.
- Compatible avec la FDU.
- Exemples géométriques: $M \times X \to X$ et $\mathbf{A} = C(X)$.

C*-superalgèbres

Superinvolution sur une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée **A**: $^\dagger : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 0 telle que $(a^\dagger)^\dagger = a$, et $(a \cdot b)^\dagger = (-1)^{|a||b|} b^\dagger \cdot a^\dagger$

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Une C*-superalgèbre est une algèbre de Banach $\mathbb{Z}_2$-graduée superinvolutive **A** qui peut être représentée sur un superespace de Hilbert $(\mathcal{H}, J)$ par une représentation isométrique (compatible avec la superinvolution) de degré 0:

$$\varrho : \mathbf{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

- Exemple: $(\mathbf{A} = L^\infty(X), \|f\| = \sum_I \|f_I\|_\infty)$: C*-superalgèbre, représentée par multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(X)$.

$\rightarrow$ Notion de superespace non-commutatif.

- Compatible avec la FDU.
- Exemples géométriques: $M \times X \to X$ et $\mathbf{A} = C(X)$

C*-superalgèbres

Superinvolution sur une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathbf{A}$: $^\dagger : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 0 telle que $(a^\dagger)^\dagger = a$, et $(a{\cdot}b)^\dagger = (-1)^{|a||b|} b^\dagger{\cdot}a^\dagger$

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Une C*-superalgèbre est une algèbre de Banach $\mathbb{Z}_2$-graduée superinvolutive $\mathbf{A}$ qui peut être représentée sur un superespace de Hilbert $(\mathcal{H}, J)$ par une représentation isométrique (compatible avec la superinvolution) de degré 0:

$$\varrho : \mathbf{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

- Exemple: $(\mathbf{A} = L^\infty(X), \|f\| = \sum_I \|f_I\|_\infty)$: C*-superalgèbre, représentée par multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(X)$.

$\to$ Notion de superespace non-commutatif.

- Compatible avec la FDU.
- Exemples géométriques: $M \times X \to X$ et $\mathbf{A} = \mathcal{C}(X)$.

C*-superalgèbres

Superinvolution sur une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée **A**: $^\dagger : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 0 telle que $(a^\dagger)^\dagger = a$, et $(a{\cdot}b)^\dagger = (-1)^{|a||b|} b^\dagger{\cdot}a^\dagger$

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Une C*-superalgèbre est une algèbre de Banach $\mathbb{Z}_2$-graduée superinvolutive **A** qui peut être représentée sur un superespace de Hilbert $(\mathcal{H}, J)$ par une représentation isométrique (compatible avec la superinvolution) de degré 0:

$$\varrho : \mathbf{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

- Exemple: $(\mathbf{A} = L^\infty(X), \|f\| = \sum_I \|f_I\|_\infty)$: C*-superalgèbre, représentée par multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(X)$.

→ Notion de superespace non-commutatif.

- Compatible avec la FDU.
- Exemples géométriques: $M \times X \to X$ et $\mathbf{A} = \mathcal{C}(X)$.

C*-superalgèbres

Superinvolution sur une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathbf{A}$: $^\dagger : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 0 telle que $(a^\dagger)^\dagger = a$, et $(a{\cdot}b)^\dagger = (-1)^{|a||b|} b^\dagger {\cdot} a^\dagger$

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Une C*-superalgèbre est une algèbre de Banach $\mathbb{Z}_2$-graduée superinvolutive $\mathbf{A}$ qui peut être représentée sur un superespace de Hilbert $(\mathcal{H}, J)$ par une représentation isométrique (compatible avec la superinvolution) de degré 0:

$$\varrho : \mathbf{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

- Exemple: $(\mathbf{A} = L^\infty(X), \|f\| = \sum_I \|f_I\|_\infty)$: C*-superalgèbre, représentée par multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(X)$.

$\to$ Notion de superespace non-commutatif.

- Compatible avec la FDU.
- Exemples géométriques: $M \times X \to X$ et $\mathbf{A} = \mathcal{C}(X)$.

C*-superalgèbres

Superinvolution sur une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathbf{A}$: $^\dagger : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 0 telle que $(a^\dagger)^\dagger = a$, et $(a{\cdot}b)^\dagger = (-1)^{|a||b|} b^\dagger{\cdot}a^\dagger$

Définition (Bieliavsky A.G. Tuynman '10)

Une C*-superalgèbre est une algèbre de Banach $\mathbb{Z}_2$-graduée superinvolutive $\mathbf{A}$ qui peut être représentée sur un superespace de Hilbert $(\mathcal{H}, J)$ par une représentation isométrique (compatible avec la superinvolution) de degré 0:

$$\varrho : \mathbf{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

- Exemple: $(\mathbf{A} = L^\infty(X), \|f\| = \sum_I \|f_I\|_\infty)$: C*-superalgèbre, représentée par multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(X)$.

$\to$ Notion de superespace non-commutatif.

- Compatible avec la FDU.
- Exemples géométriques: $M \times X \to X$ et $\mathbf{A} = \mathcal{C}(X)$.

TQC sur l'espace de Moyal

- Algèbre de Moyal $\mathbb{R}^m_\theta$: déformation de $\mathbb{R}^m$ (formule de vN).
- Fonctionnelle d'action ϕ^4 sur l'espace de Moyal: $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$S[\phi] = \int d^m x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda\, \phi \star \phi \star \phi \star \phi\right)$$

- Corrections quantiques $\Rightarrow$ divergences.
- La théorie est renormalisable si les divergences peuvent être réabsorbées dans les paramètres M, λ.
- Ici, mélange UV-IR $\Rightarrow$ la théorie n'est pas renormalisable.
- Modèle renormalisable (m=2,4) (Grosse Wulkenhaar '04):

$$\tilde{S}[\phi] = S[\phi] + \int d^m x \frac{\Omega^2}{2} x^2 \phi^2.$$

TQC sur l'espace de Moyal

- Algèbre de Moyal $\mathbb{R}^m_\theta$: déformation de $\mathbb{R}^m$ (formule de vN).
- Fonctionnelle d'action ϕ^4 sur l'espace de Moyal: $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$S[\phi] = \int d^m x \Big(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{M^2}{2} \phi^2 + \lambda\, \phi \star \phi \star \phi \star \phi \Big)$$

- Corrections quantiques $\Rightarrow$ divergences.
- La théorie est renormalisable si les divergences peuvent être réabsorbées dans les paramètres M, λ.
- Ici, mélange UV-IR $\Rightarrow$ la théorie n'est pas renormalisable.
- Modèle renormalisable (m=2,4) (Grosse Wulkenhaar '04):

$$\tilde{S}[\phi] = S[\phi] + \int \mathrm{d}^m x \frac{\Omega^2}{2} x^2 \phi^2 .$$

TQC sur l'espace de Moyal

- Algèbre de Moyal $\mathbb{R}^m_\theta$: déformation de $\mathbb{R}^m$ (formule de vN).
- Fonctionnelle d'action ϕ^4 sur l'espace de Moyal: $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$S[\phi] = \int d^m x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda\, \phi \star \phi \star \phi \star \phi\right)$$

- Corrections quantiques $\Rightarrow$ divergences.
- La théorie est renormalisable si les divergences peuvent être réabsorbées dans les paramètres M, λ.
- Ici, mélange UV-IR $\Rightarrow$ la théorie n'est pas renormalisable.
- Modèle renormalisable (m=2,4) (Grosse Wulkenhaar '04):

$$\tilde{S}[\phi] = S[\phi] + \int d^m x \frac{\Omega^2}{2} x^2 \phi^2.$$

TQC sur l'espace de Moyal

- Algèbre de Moyal $\mathbb{R}^m_\theta$: déformation de $\mathbb{R}^m$ (formule de vN).
- Fonctionnelle d'action ϕ^4 sur l'espace de Moyal: $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$S[\phi] = \int d^m x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda\, \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right)$$

- Corrections quantiques $\Rightarrow$ divergences.
- La théorie est renormalisable si les divergences peuvent être réabsorbées dans les paramètres M, λ.
- Ici, mélange UV-IR $\Rightarrow$ la théorie n'est pas renormalisable.
- Modèle renormalisable (m=2,4) (Grosse Wulkenhaar '04):

$$\tilde{S}[\phi] = S[\phi] + \int \mathrm{d}^m x \frac{\Omega^2}{2} x^2 \phi^2.$$

TQC sur l'espace de Moyal

- Algèbre de Moyal $\mathbb{R}^m_\theta$: déformation de $\mathbb{R}^m$ (formule de vN).
- Fonctionnelle d'action ϕ^4 sur l'espace de Moyal: $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$S[\phi] = \int d^m x \Big(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{M^2}{2} \phi^2 + \lambda\, \phi \star \phi \star \phi \star \phi \Big)$$

- Corrections quantiques $\Rightarrow$ divergences.
- La théorie est renormalisable si les divergences peuvent être réabsorbées dans les paramètres M, λ.
- Ici, mélange UV-IR $\Rightarrow$ la théorie n'est pas renormalisable.
- Modèle renormalisable (m=2,4) (Grosse Wulkenhaar '04):

$$\tilde{S}[\phi] = S[\phi] + \int \mathrm{d}^m x \frac{\Omega^2}{2} x^2 \phi^2 .$$

TQC sur l'espace de Moyal

- Algèbre de Moyal $\mathbb{R}^m_\theta$: déformation de $\mathbb{R}^m$ (formule de vN).
- Fonctionnelle d'action ϕ^4 sur l'espace de Moyal: $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$S[\phi] = \int d^m x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{M^2}{2} \phi^2 + \lambda \, \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right)$$

- Corrections quantiques $\Rightarrow$ divergences.
- La théorie est renormalisable si les divergences peuvent être réabsorbées dans les paramètres M, λ.
- Ici, mélange UV-IR $\Rightarrow$ la théorie n'est pas renormalisable.
- Modèle renormalisable (m=2,4) (Grosse Wulkenhaar '04):

$$\tilde{S}[\phi] = S[\phi] + \int \mathrm{d}^m x \frac{\Omega^2}{2} x^2 \phi^2 .$$

Interprétation

- Sur $\mathbb{R}^{m|1}$, on considère le champ $\phi\eta$ avec $\eta = 1 + b\xi$ ($b \in \mathbb{R}$).
- Action ϕ^4:

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}|[-\frac{i}{2}\widetilde{x}_\mu\eta,\phi\eta]_\star|^2 + \frac{M^2}{2}(\phi\eta)^{\star 2} + \lambda(\phi\eta)^{\star 4}\Big)$$
$$= \int d^m x\Big(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{b^4}{8}x^2\phi^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda(1+\frac{b^4\theta}{16})\phi\star\phi\star\phi\star\phi\Big)$$

$\rightarrow$ théorie renormalisable.

- Change l'espace, pas l'action ϕ^4.

$\rightarrow$ Universalité de la déformation pour l'action ϕ^4:

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m|1}_\theta$$

- Intérêt: utiliser cette interprétation et l'universalité pour trouver des théories renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs.

Interprétation

- Sur $\mathbb{R}^{m|1}$, on considère le champ $\phi\eta$ avec $\eta = 1 + b\xi$ ($b \in \mathbb{R}$).
- Action ϕ^4:

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}|[-\frac{i}{2}\widetilde{x}_\mu\eta, \phi\eta]_\star|^2 + \frac{M^2}{2}(\phi\eta)^{\star 2} + \lambda(\phi\eta)^{\star 4}\Big)$$

$$= \int d^m x \Big(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{b^4}{8}x^2\phi^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda(1 + \frac{b^4\theta}{16})\phi\star\phi\star\phi\star\phi\Big)$$

$\rightarrow$ théorie renormalisable.

- Change l'espace, pas l'action ϕ^4.

$\rightarrow$ Universalité de la déformation pour l'action ϕ^4:

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_\theta^{m|1}$$

- Intérêt: utiliser cette interprétation et l'universalité pour trouver des théories renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs.

Interprétation

- Sur $\mathbb{R}^{m|1}$, on considère le champ $\phi\eta$ avec $\eta = 1 + b\xi$ ($b \in \mathbb{R}$).
- Action ϕ^4:

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}|[-\frac{i}{2}\widetilde{x}_\mu\eta, \phi\eta]_\star|^2 + \frac{M^2}{2}(\phi\eta)^{\star 2} + \lambda(\phi\eta)^{\star 4}\Big)$$
$$= \int d^m x\Big(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{b^4}{8}x^2\phi^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda(1+\frac{b^4\theta}{16})\phi\star\phi\star\phi\star\phi\Big)$$

$\rightarrow$ théorie renormalisable.

- Change l'espace, pas l'action ϕ^4.

$\rightarrow$ Universalité de la déformation pour l'action ϕ^4:

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_\theta^{m|1}$$

- Intérêt: utiliser cette interprétation et l'universalité pour trouver des théories renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs.

Interprétation

- Sur $\mathbb{R}^{m|1}$, on considère le champ $\phi\eta$ avec $\eta = 1 + b\xi$ ($b \in \mathbb{R}$).
- Action ϕ^4:

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}|[-\frac{i}{2}\widetilde{x}_\mu\eta, \phi\eta]_\star|^2 + \frac{M^2}{2}(\phi\eta)^{\star 2} + \lambda(\phi\eta)^{\star 4}\Big)$$
$$= \int d^m x\Big(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{b^4}{8}x^2\phi^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda(1+\frac{b^4\theta}{16})\phi\star\phi\star\phi\star\phi\Big)$$

$\rightarrow$ théorie renormalisable.

- Change l'espace, pas l'action ϕ^4.

$\rightarrow$ Universalité de la déformation pour l'action ϕ^4:

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_\theta^{m|1}$$

- Intérêt: utiliser cette interprétation et l'universalité pour trouver des théories renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs.

Interprétation

- Sur $\mathbb{R}^{m|1}$, on considère le champ $\phi\eta$ avec $\eta = 1 + b\xi$ ($b \in \mathbb{R}$).
- Action ϕ^4:

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}|[-\frac{i}{2}\widetilde{x}_\mu\eta, \phi\eta]_\star|^2 + \frac{M^2}{2}(\phi\eta)^{\star 2} + \lambda(\phi\eta)^{\star 4}\Big)$$
$$= \int d^m x\Big(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{b^4}{8}x^2\phi^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda(1+\frac{b^4\theta}{16})\phi\star\phi\star\phi\star\phi\Big)$$

$\rightarrow$ théorie renormalisable.

- Change l'espace, pas l'action ϕ^4.

$\rightarrow$ Universalité de la déformation pour l'action ϕ^4:

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m|1}_\theta$$

- Intérêt: utiliser cette interprétation et l'universalité pour trouver des théories renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs.

Interprétation

- Sur $\mathbb{R}^{m|1}$, on considère le champ $\phi\eta$ avec $\eta = 1 + b\xi$ ($b \in \mathbb{R}$).
- Action ϕ^4:

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}|[-\frac{i}{2}\widetilde{x}_\mu\eta, \phi\eta]_\star|^2 + \frac{M^2}{2}(\phi\eta)^{\star 2} + \lambda(\phi\eta)^{\star 4}\Big)$$
$$= \int d^m x\Big(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{b^4}{8}x^2\phi^2 + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \lambda(1+\frac{b^4\theta}{16})\phi\star\phi\star\phi\star\phi\Big)$$

$\rightarrow$ théorie renormalisable.

- Change l'espace, pas l'action ϕ^4.

$\rightarrow$ Universalité de la déformation pour l'action ϕ^4:

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m|1}_\theta$$

- Intérêt: utiliser cette interprétation et l'universalité pour trouver des théories renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs.

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_\theta^{4|1}$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_\theta^{4|1}$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4|1}_\theta$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_\theta^{4|1}$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_\theta^{4|1}$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4|1}_\theta$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_\theta^{4|1}$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4|1}_\theta$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\quad \simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_\theta^{4|1}$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs

Conclusion

Résultats:

- Déformation de $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^{m|n})$, $\simeq$ Clifford$\otimes$Moyal
- Caractérisée par une algèbre de Fréchet-Hopf graduée
- Notion de C*-superalgèbre: superespace non-commutatif
- Déformation de C*-superalgèbres sur lesquelles $\mathbb{R}^{m|n}$ agit
- Cohérence par rapport à l'action ϕ^4: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4|1}_\theta$

Perspectives:

- Exemple du supertore, classification des feuilletages
- Supervariétés non-triviales
- (super)groupes non-abéliens: star-exponentielle non formelle des groupes de Kähler à courbure négative
- Actions renormalisables sur d'autres espaces non-commutatifs