Le modèle à 6-Vertex généralisé et des polynômes de Macdonald

Tiago Fonseca

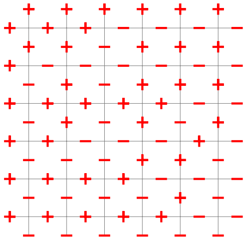
LAPTh, CNRS, Annecy

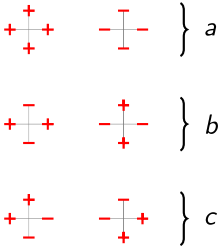
2 mai 2013

Travail réalisé en collaboration avec Ferenc Balogh

Table des matières

Définition du modèle à 6-Vertex



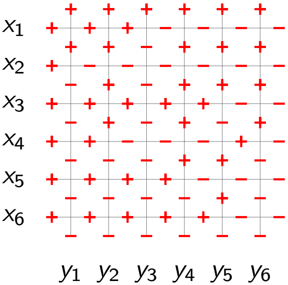


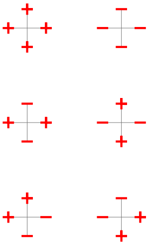
Définition (Fonction de partition)

On définit la fonction de partition comme d'habitude :

$$\mathcal{Z}_n \propto \sum_{\text{configurations}} \prod_{i,j} \omega_{i,j}$$

Définition du modèle à 6-Vertex





$$a = qx - q^{-1}y$$

$$b = x - y$$

$$c = (q - q^{-1})\sqrt{xy}$$

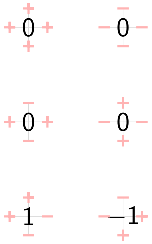
Définition (Fonction de partition)

On définit la fonction de partition comme d'habitude :

$$\mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \propto \sum_{\text{configurations}} \prod_{i,j} \omega_{i,j}(x_i, y_j)$$

Définition du modèle à 6-Vertex

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & q & q & q & q & q & q
\end{array}
$$



$\} \; a = q - 1$

$\} \; b = q - 1$

$\} \; c = q - 1$

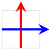
Définition (Fonction de partition)

On peut l'utiliser pour compter des matrices de signe alterné ($q^3 = 1$) :

$$\mathcal{Z}_n(\mathbf{1}, \boldsymbol{q}) = \sharp\{\text{ASM de taille } n \times n\} = 1,\ 2,\ 7,\ 42,\ 429,\ \ldots$$

La matrice $\check{R}$

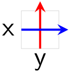
On construit des configurations avec des petites plaquettes :

x  y

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} =: \check{R}(x,y)$$

La matrice $\check{R}$

On construit des configurations avec des petites plaquettes :



$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} =: \check{R}(x,y)$$

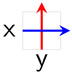
Donc

$$\check{R}(x,y) : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$$

où V_i est la représentation irréductible 2-dimensionnelle de $U_q(sl_2)$.

La matrice $\check{R}$

On construit des configurations avec des petites plaquettes :



$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} =: \check{R}(x,y)$$

Donc

$$\check{R}(x,y) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$$

où V_i est la représentation irréductible 2-dimensionnelle de $U_q(sl_2)$.

Exemple

$$\check{R}(x,y)\ v_+ \otimes v_- = c(x,y)\ v_+ \otimes v_- + b(x,y)\ v_- \otimes v_+$$

L'équation d'Yang–Baxter

L'identité :

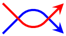
$$\check{R}(x,y)\check{R}(y,x) = (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)Id.$$

L'équation d'Yang–Baxter :

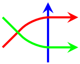
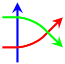
$$\check{R}_{2,3}(y_2,y_3)\check{R}_{1,3}(y_1,y_3)\check{R}_{1,2}(y_1,y_2) = \check{R}_{1,2}(y_1,y_2)\check{R}_{1,3}(y_1,y_3)\check{R}_{2,3}(y_2,y_3)$$

L'équation d'Yang–Baxter

L'identité :

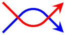
 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

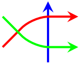
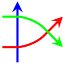
 $=$ 

L'équation d'Yang–Baxter

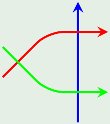
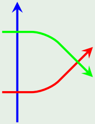
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

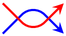
 $=$ 

Exemple

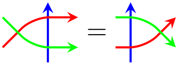
 $=$ 

L'équation d'Yang–Baxter

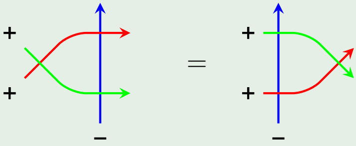
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

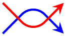


Exemple

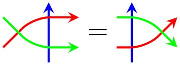


L'équation d'Yang–Baxter

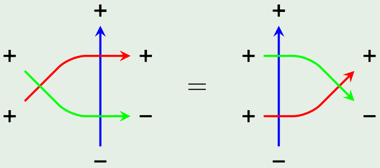
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

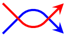


Exemple

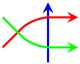
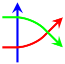


L'équation d'Yang–Baxter

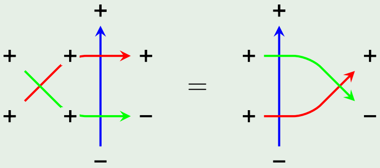
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

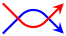
 $=$ 

Exemple

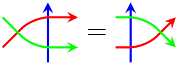


L'équation d'Yang–Baxter

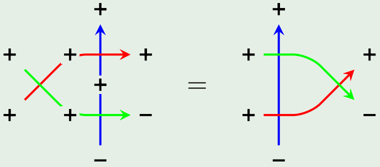
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

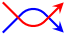


Exemple

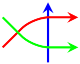
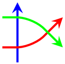


L'équation d'Yang–Baxter

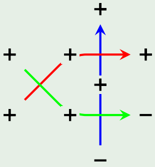
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

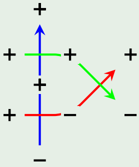
L'équation d'Yang–Baxter :

 $=$ 

Exemple

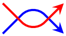
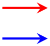


$=$

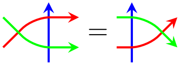


L'équation d'Yang–Baxter

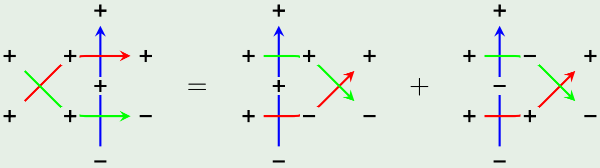
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

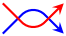


Exemple

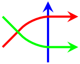
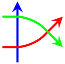


L'équation d'Yang–Baxter

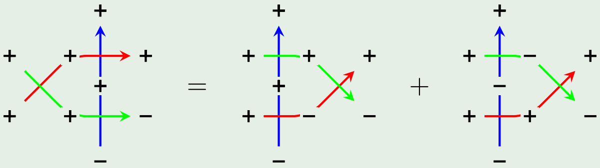
L'identité :

 $= (qx - q^{-1}y)(qy - q^{-1}x)$ 

L'équation d'Yang–Baxter :

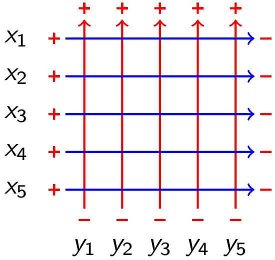
 $=$ 

Exemple

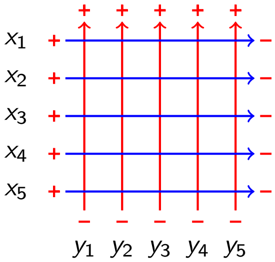


$$a(x,y)a(y,z)c(x,z) = c(y,z)a(x,z)c(x,y) + b(y,z)c(x,z)b(x,y)$$

La fonction de partition

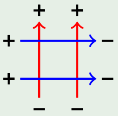


La fonction de partition

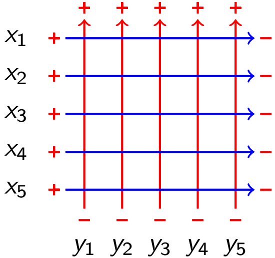


Exemple ($n = 2$)

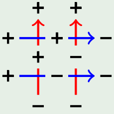
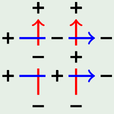
$\mathcal{Z}_2 =$



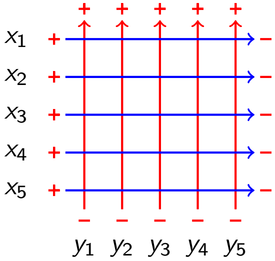
La fonction de partition



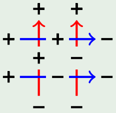
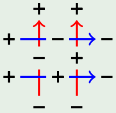
Exemple ($n = 2$)

$\mathcal{Z}_2 =$  $+$ 

La fonction de partition



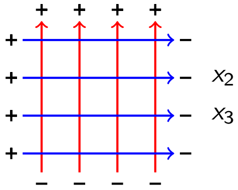
Exemple ($n = 2$)

$\mathcal{Z}_2 =$  $+$ 

$$c(x_2, y_1)a(x_2, y_2)a(x_1, y_1)c(x_1, y_2) + b(x_2, y_1)c(x_2, y_2)c(x_1, y_1)b(x_1, y_2)$$

Propriétés de la fonction de partition

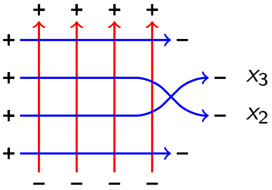
Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :



Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

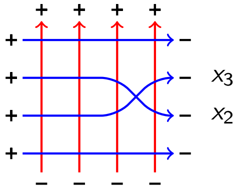
$$\frac{1}{qx_2 - q^{-1}x_3}$$



Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

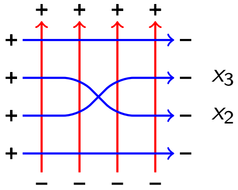
$\frac{1}{qx_2 - q^{-1}x_3}$



Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

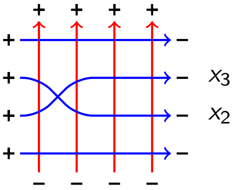
$\frac{1}{qx_2 - q^{-1}x_3}$



Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

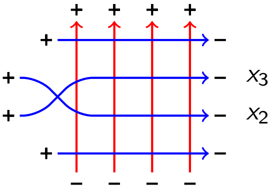
$\frac{1}{qx_2 - q^{-1}x_3}$



Propriétés de la fonction de partition

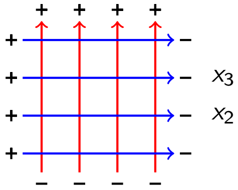
Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

$\frac{1}{qx_2 - q^{-1}x_3}$



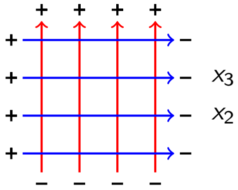
Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

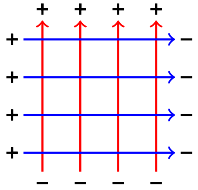


Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

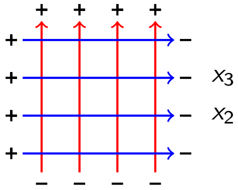


La relation de récurrence de Korepin. Si $y_1 = q^2 x_1$, $a(x_1, y_1) = 0$, alors :

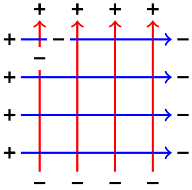


Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

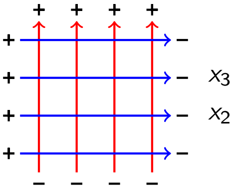


La relation de récurrence de Korepin. Si $y_1 = q^2 x_1$, $a(x_1, y_1) = 0$, alors :

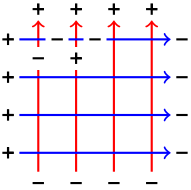


Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

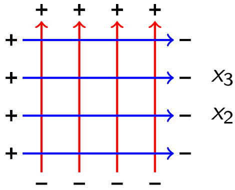


La relation de récurrence de Korepin. Si $y_1 = q^2 x_1$, $a(x_1, y_1) = 0$, alors :

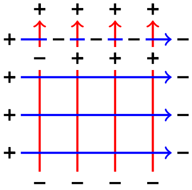


Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

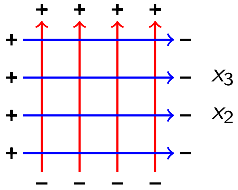


La relation de récurrence de Korepin. Si $y_1 = q^2 x_1$, $a(x_1, y_1) = 0$, alors :

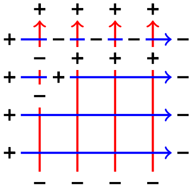


Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

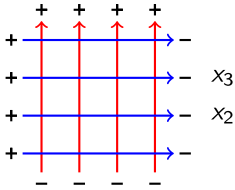


La relation de récurrence de Korepin. Si $y_1 = q^2 x_1$, $a(x_1, y_1) = 0$, alors :

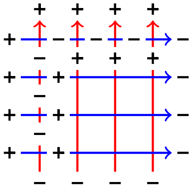


Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :

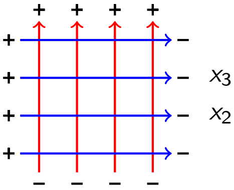


La relation de récurrence de Korepin. Si $y_1 = q^2 x_1$, $a(x_1, y_1) = 0$, alors :

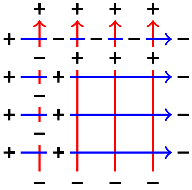


Propriétés de la fonction de partition

Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Preuve l'équation d'Yang–Baxter :



La relation de récurrence de Korepin. Si $y_1 = q^2 x_1$, $a(x_1, y_1) = 0$, alors :



$$\mathcal{Z}_n\big|_{y_1 = q^2 x_1} \propto \prod_{i \neq 1} (y_i - x_1)(x_i - y_1)\sqrt{x_1 y_1}\,\mathcal{Z}_{n-1}$$

Propriétés de la fonction de partition

Un poids $c(x_i, y_j)$ apparaît un nombre impair de fois en chaque colonne et ligne. On peut donc normaliser

$$\frac{\mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\prod_i \sqrt{x_i y_i}} \to \mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Propriétés de la fonction de partition

Un poids $c(x_i, y_j)$ apparaît un nombre impair de fois en chaque colonne et ligne. On peut donc normaliser

$$\frac{\mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\prod_i \sqrt{x_i y_i}} \to \mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Propriétés

- *Satisfait la relation de récurrence de Korepin ;*
- *Un polynôme homogène ;*
- *Un dégrée total de $n(n-1)$;*
- *Un dégrée partiel à chaque variable de $n-1$;*
- *Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.*

Formule explicite de la fonction de partition

En utilisant la relation de récurrence de Korepin, Izergin a montré que :

$$\mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\text{pré-facteur}) \det \left| \frac{1}{(x_i - q y_j)(q x_i - y_j)} \right|_{i,j}$$

Formule explicite de la fonction de partition

En utilisant la relation de récurrence de Korepin, Izergin a montré que :

$$\mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\text{pré-facteur}) \det \left| \frac{1}{(x_i - q y_j)(q x_i - y_j)} \right|_{i,j}$$

Propriétés

- *Satisfait la relation de récurrance de Korepin ;*
- *Un polynôme homogène ;*
- *Un dégrée total de $n(n-1)$;*
- *Un dégrée partiel à chaque variable de $n-1$;*
- *Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.*

Un polynôme de Schur

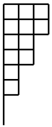
On met $q = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, connu par point combinatoire.

$$Y_n = \{n-1, n-1, n-2, n-2, \ldots, 1, 1, 0, 0\}$$

Un polynôme de Schur

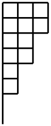
On met $q = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, connu par point combinatoire.

$$Y_4 =$$



Un polynôme de Schur

On met $q = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, connu par point combinatoire.

$Y_4 =$ 

Miraculeusement :

$$\mathcal{Z}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = S_{Y_{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Définition (Polynôme de Schur)

Soit $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, alors le polynôme de Schur est donné par :

$$S_\lambda(\boldsymbol{z}) = \frac{\det \left| z_i^{N+\lambda_j - j} \right|_{i,j}}{\det \left| z_i^{N-j} \right|_{i,j}}$$

Généralisation à plus haut spin

On peut construire une matrice $\check{R}$ analogue à plus haut spin :

$$\check{R}^{(\ell)}(x,y) : V_1^{(\ell)} \otimes V_2^{(\ell)} \to V_2^{(\ell)} \otimes V_1^{(\ell)}$$

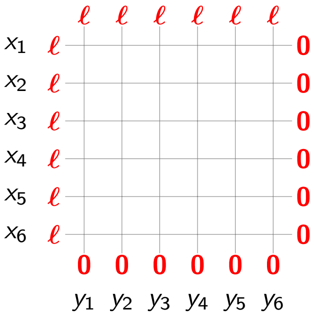
où $V^{(\ell)}$ est la représentation irréductible $(\ell+1)$-dimensionnelle.

Généralisation à plus haut spin

On peut construire une matrice $\check{R}$ analogue à plus haut spin :

$$\check{R}^{(\ell)}(x,y) : V_1^{(\ell)} \otimes V_2^{(\ell)} \to V_2^{(\ell)} \otimes V_1^{(\ell)}$$

où $V^{(\ell)}$ est la représentation irréductible $(\ell+1)$-dimensionnelle.

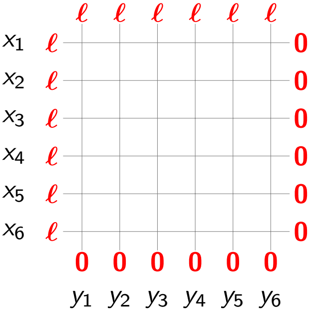


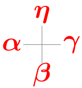
Généralisation à plus haut spin

On peut construire une matrice $\check{R}$ analogue à plus haut spin :

$$\check{R}^{(\ell)}(x,y) : V_1^{(\ell)} \otimes V_2^{(\ell)} \to V_2^{(\ell)} \otimes V_1^{(\ell)}$$

où $V^{(\ell)}$ est la représentation irréductible $(\ell+1)$-dimensionnelle.





$$\alpha + \beta = \gamma + \eta$$

Fusion

On peut obtenir $V^{(\ell)}$ en décomposant le produit tensoriel $V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(1)}$.

Fusion

On peut obtenir $V^{(\ell)}$ en décomposant le produit tensoriel $V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(1)}$.

Exemple ($\ell = 3$)

$$v_3^{(3)} = v_+ \otimes v_+ \otimes v_+$$
$$v_2^{(3)} = v_- \otimes v_+ \otimes v_+ + v_+ \otimes v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_+ \otimes v_-$$

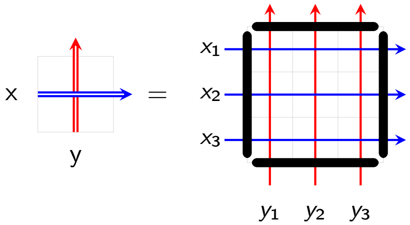
Fusion

On peut obtenir $V^{(\ell)}$ en décomposant le produit tensoriel $V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(1)}$.

Exemple ($\ell = 3$)

$$v_3^{(3)} = v_+ \otimes v_+ \otimes v_+$$
$$v_2^{(3)} = v_- \otimes v_+ \otimes v_+ + v_+ \otimes v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_+ \otimes v_-$$

On définit la nouvelle matrice $\check{R}^{(\ell)}$ par :



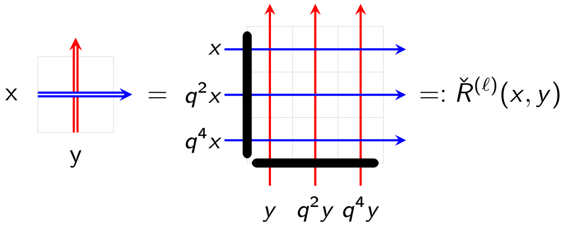
Fusion

On peut obtenir $V^{(\ell)}$ en décomposant le produit tensoriel $V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(1)}$.

Exemple ($\ell = 3$)

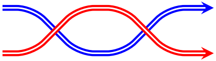
$$v_3^{(3)} = v_+ \otimes v_+ \otimes v_+$$
$$v_2^{(3)} = v_- \otimes v_+ \otimes v_+ + v_+ \otimes v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_+ \otimes v_-$$

On définit la nouvelle matrice $\check{R}^{(\ell)}$ par :



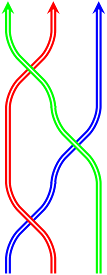
L'équation d'Yang–Baxter

L'identité :

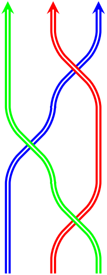


$\propto$

L'équation d'Yang–Baxter :

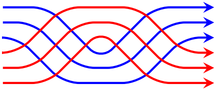


$=$



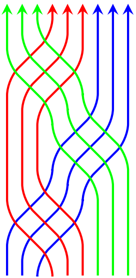
L'équation d'Yang–Baxter

L'identité :

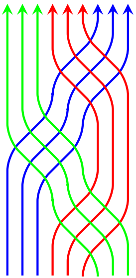


$$\propto$$

L'équation d'Yang–Baxter :

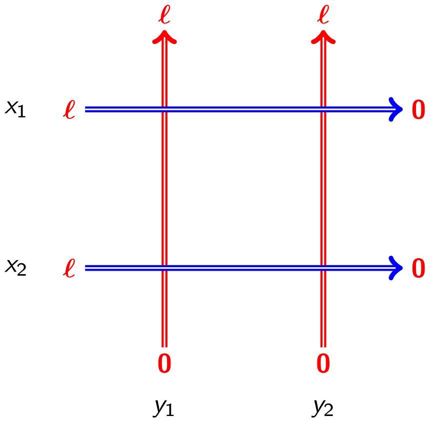


$$=$$



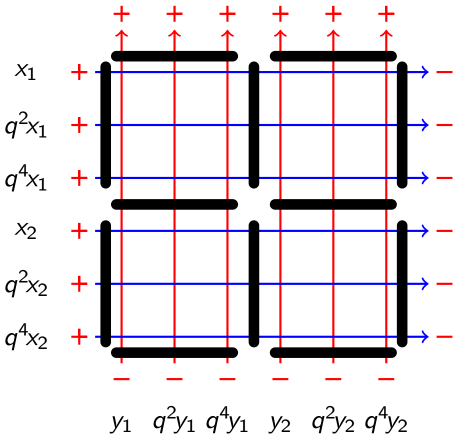
La fonction de partition

On construit la fonction de partition de la même façon :



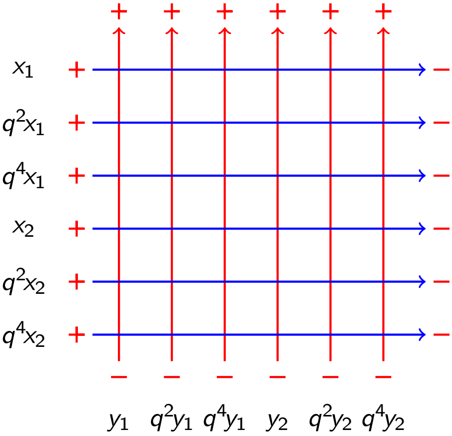
La fonction de partition

On construit la fonction de partition de la même façon :



La fonction de partition

On construit la fonction de partition de la même façon :



Une formule explicite de la fonction de partition

Soit

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \{x_1, q^2 x_1, \ldots, q^{2\ell-2} x_1, \ldots, x_n, q^2 x_n, \ldots, q^{2\ell-2} x_n\}$$
$$\bar{\boldsymbol{y}} = \{y_1, q^2 y_1, \ldots, q^{2\ell-2} y_1, \ldots, y_n, q^2 y_n, \ldots, q^{2\ell-2} y_n\}$$

Caradoc, Foda et Kitanine ont montré que :

$$\mathcal{Z}_{n,\ell}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\text{pré-facteur}) \det \left| \frac{1}{(\bar{x}_i - q\bar{y}_j)(q\bar{x}_i - \bar{y}_j)} \right|_{i,j}^{\ell n \times \ell n}$$

Une formule explicite de la fonction de partition

Soit

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \{x_1, q^2 x_1, \dots, q^{2\ell-2} x_1, \dots, x_n, q^2 x_n, \dots, q^{2\ell-2} x_n\}$$
$$\bar{\boldsymbol{y}} = \{y_1, q^2 y_1, \dots, q^{2\ell-2} y_1, \dots, y_n, q^2 y_n, \dots, q^{2\ell-2} y_n\}$$

Caradoc, Foda et Kitanine ont montré que :

$$\mathcal{Z}_{n,\ell}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\text{pré-facteur}) \det \left| \frac{1}{(\bar{x}_i - q\bar{y}_j)(q\bar{x}_i - \bar{y}_j)} \right|_{i,j}^{\ell n \times \ell n}$$

Propriétés

- *Satisfait une relation de récurrence plus faible ;*
- *Un polynôme homogène ;*
- *Un dégrée total de $\ell n(n-1)$;*
- *Un dégrée partiel à chaque variable de $\ell(n-1)$;*
- *Symétrique en $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.*

La condition de roue

Quand $q^{2\ell+1} = 1$, la fonction de partition satisfait la condition de roue :

Définition (Condition de roue)

Un polynôme $P(\boldsymbol{z})$ satisfait la condition de roue si :

$$P(\boldsymbol{z}) = 0 \qquad\qquad \text{si } z_k = q^{1+2s_2} z_j = q^{2+2s_1+2s_2} z_i$$

pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{N}_0$ tel que $s_1 + s_2 \leq \ell - 1$ et pour tout choix $i < j < k$.

La condition de roue

Quand $q^{2\ell+1} = 1$, la fonction de partition satisfait la condition de roue :

Définition (Condition de roue)

Un polynôme $P(\boldsymbol{z})$ satisfait la condition de roue si :

$$P(\boldsymbol{z}) = 0 \qquad \text{si } z_k = q^{1+2s_2} z_j = q^{2+2s_1+2s_2} z_i$$

pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{N}_0$ tel que $s_1 + s_2 \leq \ell - 1$ et pour tout choix $i < j < k$.

On appelle $q^{2\ell+1} = 1$, le point combinatoire.

Condition de roue - un exemple

Exemple ($\ell = 2$)

Impose $q^5 = 1$. Alors le polynôme s'annule si :

$$z_k = qz_j = q^2 z_i \qquad z_k = q^3 z_j = q^4 z_i \qquad z_k = qz_j = q^4 z_i$$

Condition de roue - un exemple

Exemple ($\ell = 2$)

Impose $q^5 = 1$. Alors le polynôme s'annule si :

$$z_k = qz_j = q^2 z_i \qquad z_k = q^3 z_j = q^4 z_i \qquad z_k = qz_j = q^4 z_i$$

Le polynôme suivant satisfait donc la condition de roue :

$$P(z_1, \ldots, z_{2n}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (qz_i - z_j)(q^3 z_i - z_j) \prod_{n < i < j \leq 2n} (qz_i - z_j)(q^3 z_i - z_j)$$

Polynômes symétrqies - des bases différentes

Soit $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, tel que $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

Définition (Monômes)

$$m_\lambda = \mathcal{S}\left(z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_1} \ldots z_N^{\lambda_N}\right)$$

Polynômes symétrqies - des bases différentes

Soit $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, tel que $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

Définition (Monômes)

$$m_\lambda = \mathcal{S}\left(z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_1} \ldots z_N^{\lambda_N}\right)$$

Exemple :

$$m_{\{1,1,0\}} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Polynômes symétrqies - des bases différentes

Soit $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, tel que $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

Définition (Monômes)

$$m_\lambda = \mathcal{S}\left(z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_1} \dots z_N^{\lambda_N}\right)$$

Exemple :

$$m_{\{1,1,0\}} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Définition (Somme de puissances)

$$p_k = \sum_i z_i^k \qquad p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_N}$$

Polynômes symétrqies - des bases différentes

Soit $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, tel que $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

Définition (Monômes)

$$m_\lambda = \mathcal{S}\left(z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_1} \ldots z_N^{\lambda_N}\right)$$

Exemple :

$$m_{\{1,1,0\}} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Définition (Somme de puissances)

$$p_k = \sum_i z_i^k \qquad\qquad p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_N}$$

Exemple :

$$p_{\{1,1,0\}} = (z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)$$

Polynômes de Macdonald

On définit un produit scalaire par :

$$\langle p_\lambda(\boldsymbol{z}), p_\mu(\boldsymbol{z})\rangle_{\tilde{q},t} = z_\mu \delta_{\lambda\mu} \prod_i \frac{1-\tilde{q}^{\mu_i}}{1-t^{\mu_i}}$$

Polynômes de Macdonald

On définit un produit scalaire par :

$$\langle p_\lambda(\boldsymbol{z}), p_\mu(\boldsymbol{z})\rangle_{\tilde{q},t} = z_\mu \delta_{\lambda\mu} \prod_i \frac{1-\tilde{q}^{\mu_i}}{1-t^{\mu_i}}$$

Définition (Polynômes de Macdonald)

Les polynômes de Macdonald sont définis à travers de la procédure de Gram–Schmidt :

$$0 = \langle P_\lambda(\boldsymbol{z};\tilde{q},t), P_\mu(\boldsymbol{z};\tilde{q},t)\rangle_{\tilde{q},t} \qquad \text{si } \lambda \neq \mu$$

$$P_\lambda(\boldsymbol{z};\tilde{q},t) = m_\lambda(\boldsymbol{z}) + \sum_{\mu\prec\lambda} c_{\lambda,\mu}(\tilde{q},t) m_\mu(\boldsymbol{z})$$

Ils dépendent de deux paramètres $\tilde{q}$ et t.

Polynômes de Macdonald

On définit un produit scalaire par :

$$\langle p_\lambda(\boldsymbol{z}), p_\mu(\boldsymbol{z})\rangle_{\tilde{q},t} = z_\mu \delta_{\lambda\mu} \prod_i \frac{1-\tilde{q}^{\mu_i}}{1-t^{\mu_i}}$$

Définition (Polynômes de Macdonald)

Les polynômes de Macdonald sont définis à travers de la procédure de Gram–Schmidt :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_\lambda(\boldsymbol{z};\tilde{q},t), P_\mu(\boldsymbol{z};\tilde{q},t)\rangle_{\tilde{q},t} && \text{si } \lambda \neq \mu \\ P_\lambda(\boldsymbol{z};\tilde{q},t) &= m_\lambda(\boldsymbol{z}) + \textstyle\sum_{\mu\prec\lambda} c_{\lambda,\mu}(\tilde{q},t) m_\mu(\boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

Ils dépendent de deux paramètres $\tilde{q}$ et t.

Théorème (Jimbo, Miwa, Feigin et Mukhin)

Les polynômes symétriques obéissant à la condition de roue sont générés par des polynômes de Macdonald P_λ (avec $\tilde{q} = q^2$ et $t = q$), tel que :

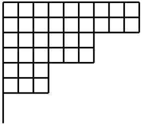
La fonction de partition comme un polynôme de Macdonald

Soit $\ell n(n-1)$ le nombre de boîtes, alors il y qu'un choix.

$$Y_{n,\ell} = \{\ell(n-1), \ell(n-1), \ell(n-2), \ell(n-2), \dots, \ell, \ell, 0, 0\}$$

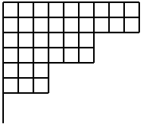
La fonction de partition comme un polynôme de Macdonald

Soit $\ell n(n-1)$ le nombre de boîtes, alors il y qu'un choix.

$Y_{4,3} =$ 

La fonction de partition comme un polynôme de Macdonald

Soit $\ell n(n-1)$ le nombre de boîtes, alors il y qu'un choix.

$Y_{4,3} =$ 

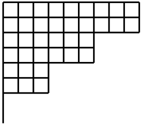
Théorème (Résultat principal)

Au point combinatoire, la fonction de partition est un polynôme de Macdonald :

$$\mathcal{Z}_{\boldsymbol{n},\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \propto P_{Y_{\boldsymbol{n},\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};q^2,q)$$

La fonction de partition comme un polynôme de Macdonald

Soit $\ell n(n-1)$ le nombre de boîtes, alors il y qu'un choix.

$Y_{4,3} =$ 

Théorème (Résultat principal)

Au point combinatoire, la fonction de partition est un polynôme de Macdonald :

$$\mathcal{Z}_{n,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \propto P_{Y_{\boldsymbol{n},\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};q^2,q)$$

Corollaire (Symétrie)

La fonction de partition est un polynôme homogène et complètement symétrique.

Questions ouvertes

- Le modèle 6–Vertex est en bijection avec le matrices de signe alterné.
  - Peut cette généralisation nous mener à des résultats combinatoires intéressants ?
  - Qu'est qu'on sait sur la limite homogène ?
- Condition de roue et déterminants.
  - Peut on obtenir des conditions de roue différentes avec des modèles similaires ?
  - Et la même condition de roue mais dégrée plus élevés ?
- Peut on prouver directement que la fonction de partition est complètement symétrique ?

Questions ouvertes

- Le modèle 6–Vertex est en bijection avec le matrices de signe alterné.
  - Peut cette généralisation nous mener à des résultats combinatoires intéressants ?
  - Qu'est qu'on sait sur la limite homogène ?
- Condition de roue et déterminants.
  - Peut on obtenir des conditions de roue différentes avec des modèles similaires ?
  - Et la même condition de roue mais dégrée plus élevés ?
- Peut on prouver directement que la fonction de partition est complètement symétrique ?

Questions ouvertes

- Le modèle 6–Vertex est en bijection avec le matrices de signe alterné.
  - Peut cette généralisation nous mener à des résultats combinatoires intéressants ?
  - Qu'est qu'on sait sur la limite homogène ?
- Condition de roue et déterminants.
  - Peut on obtenir des conditions de roue différentes avec des modèles similaires ?
  - Et la même condition de roue mais dégrée plus élevés ?
- Peut on prouver directement que la fonction de partition est complètement symétrique ?