



Distance de rotation entre arbres binaires

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- **Problème:** calculer le diamètre des associaèdres.
- **Hélas!** pas (complètement) résolu, mais résultats et méthodes nouveaux.

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

4. Utiliser les noms: la relation de recouvrement

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

5. Utiliser les noms (suite): la relation effacement

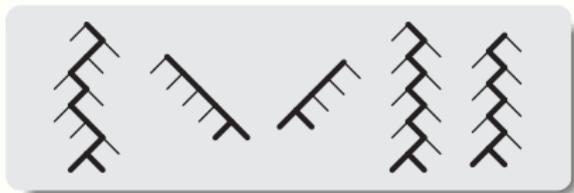
$$d(n) \geq \frac{5}{3}n - 4 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{7}{4}n - 5 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq 2n - 2\sqrt{2n} \text{ pour (tout) } n$$

1. Distance de rotation, associaèdres,
et triangulations d'un polygone

- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :



- **Taille** d'un arbre = nombre de nœuds internes = nombre de feuilles - 1;

↪ $\frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$ arbres de taille n (n -ième nombre de Catalan).

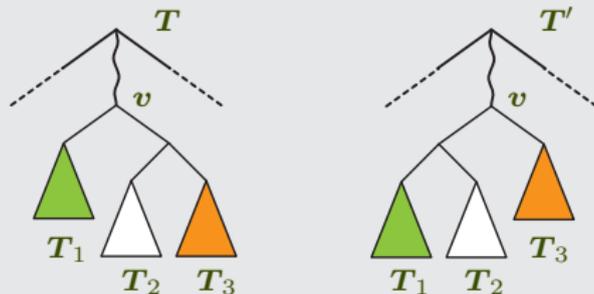
- Décomposition unique : racine / sous-arbre gauche / sous-arbre droit:

$$T = \bullet \quad \text{ou} \quad T = T_0 \wedge T_1.$$

↪ correspondance bijective entre

- arbres de taille n , et
- parenthésages d'une expression à $n + 1$ variables.

- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ; T' est obtenu par **rotation** (positive) à partir de T s'il existe un nœud v de T t.q. T et T' coïncident sauf au voisinage de v , où on a



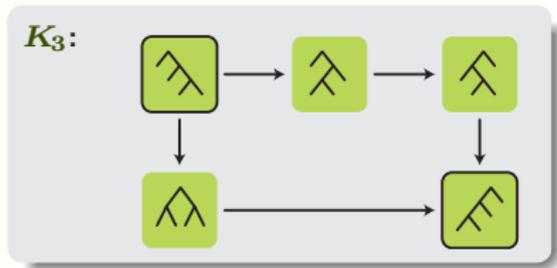
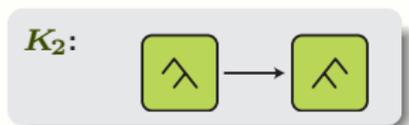
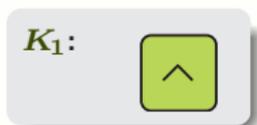
- En termes de parenthésages : rotation = application de l'associativité

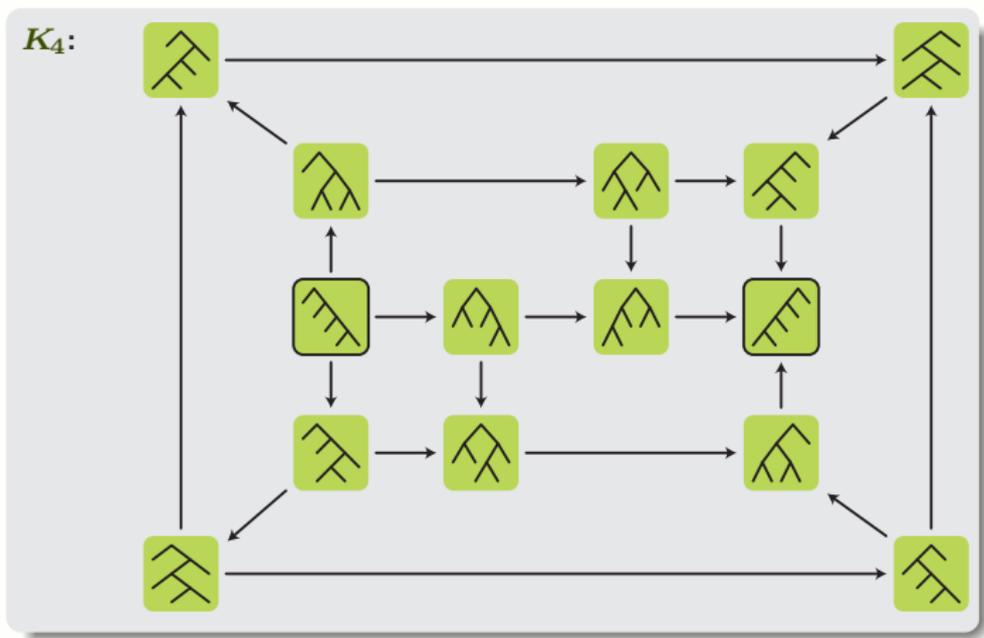
$$T_1 \wedge (T_2 \wedge T_3) \leftrightarrow (T_1 \wedge T_2) \wedge T_3.$$

- **Fait** : Deux arbres de même taille sont reliés par une suite finie de rotations.

- **Définition** : $\text{dist}(T, T') := \#$ minimal de rotations pour aller de T à T' .

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre $\text{Cayley}(\mathfrak{S}_n)$,
 donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;
 \rightsquigarrow treillis de **Tamari**, min = peigne à droite, max = peigne à gauche.

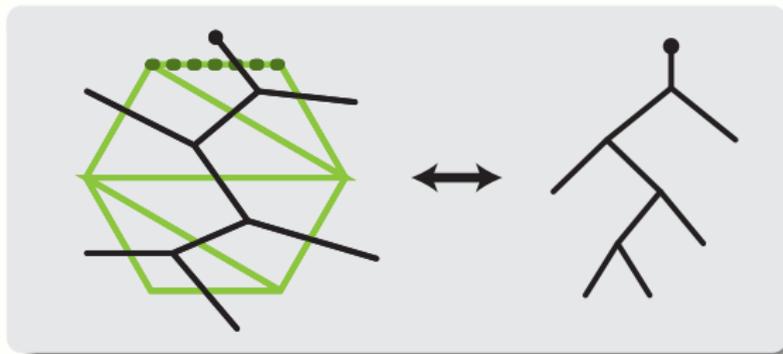




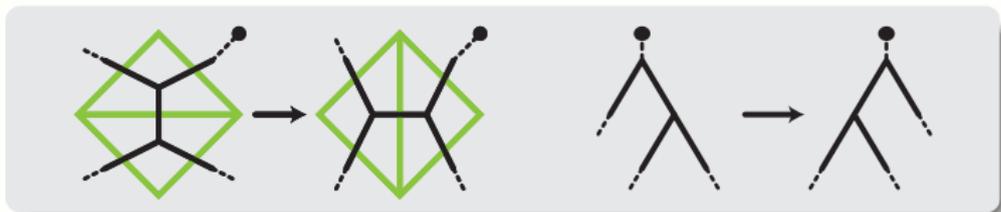
• **Définition :** $d(n) := \text{diamètre}(K_n) = \max\{\text{dist}(T, T') \mid |T| = |T'| = n\}$.

• **Exemple:** $d(4) = 4$.

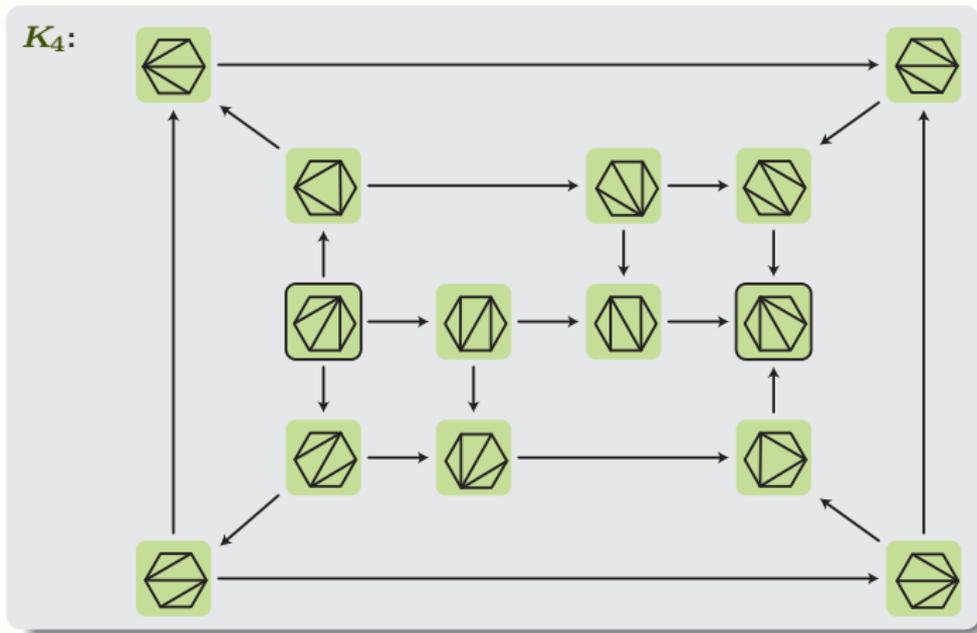
- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



- Alors une rotation correspond à un **flip** dans la triangulation associée :



↔ $d(n)$ = distance de flip maximale entre triangulations d'un $(n+2)$ -gone.



2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

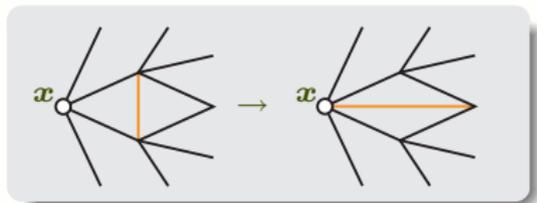
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$, donc

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) = 4n - 4.$$

Si $\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3$, alors

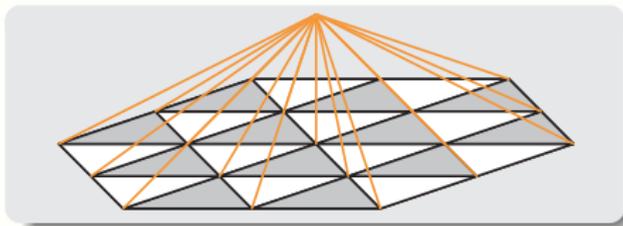
$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3(n+2).$$

Pour $n > 10$, on a $3(n+2) < 4n - 4$, d'où

$$\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \geq 4.$$

□

- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdre})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.
 \rightsquigarrow Trouver un polytope avec $n+2$ sommets et volume hyperbolique $2n-6$.
- Solution de Sleator, Tarjan, Thurston : utiliser des pavages du plan (soigneusement choisis) et les fermer avec un unique point hors du plan :

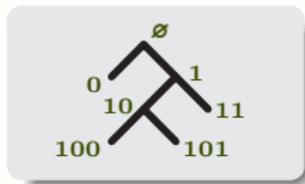


- Donne $2n - O(\sqrt{n})$, puis $2n - 6$ pour n assez grand (non effectif). □

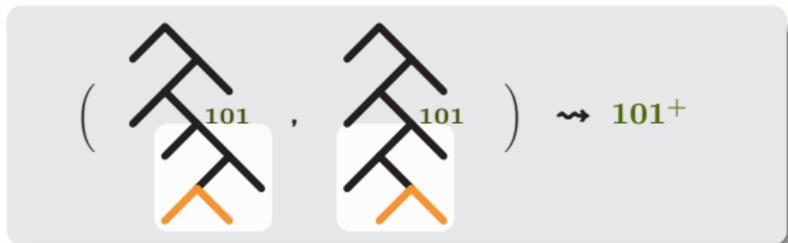
- **Questions:** Quid des petites valeurs de n ?
 Quid d'une démonstration combinatoire?

3. Utiliser les positions :
lien avec le groupe de Thompson F

- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



et spécifier une rotation par l'adresse de la racine du sous-arbre mis en jeu :

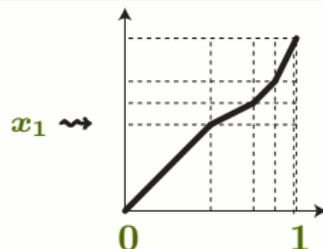
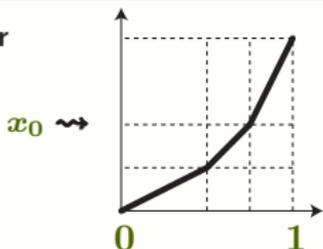


« appliquer l'associativité à la position **101** dans le sens positif ».

- Pour exploiter l'idée : utiliser le groupe de Thompson F .

• **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

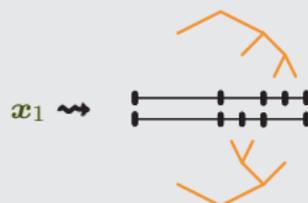
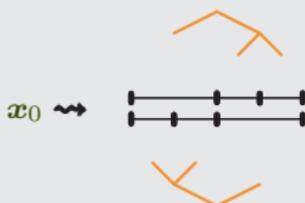
• engendré par



aussi représentés comme



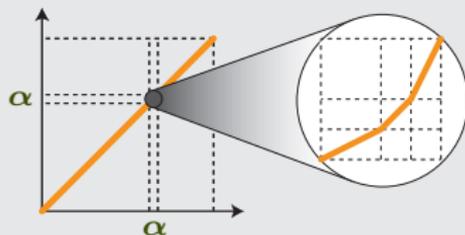
\rightsquigarrow un élément de F = un couple de décompositions dyadiques de $[0, 1]$:



donc aussi un couple d'arbres.

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$



- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

- **Lemme** : Pour tous arbres T, T' , on a $\text{dist}(T, T') = |g|_{\mathcal{A}}$,
où g est l'élément de F associé à la paire (T, T') .

- **Démonstration**: (T, T') est une paire de base d'adresse α^+
ssi (T, T') est associé à A_α . \square

\rightsquigarrow Etudier la métrique de F par rapport à la famille de générateurs \mathcal{A} .

- **Remarque** : Il existe une description complète de la métrique de F par rapport à $\{A_\emptyset, A_1\}$ (**Fordham**), et par rapport à $\{A_\emptyset, A_1, A_{11}, \dots\}$.

- **Lemme** : Le groupe F est présenté par les relations :

$$A_\alpha^2 = A_{\alpha 1} \cdot A_\alpha \cdot A_{\alpha 0} \quad (\text{pentagone de MacLane–Stasheff}),$$

$$A_{\alpha 0 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 0 0 \beta},$$

$$A_{\alpha 1 0 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 0 1 \beta},$$

$$A_{\alpha 1 1 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 1 \beta},$$

$$A_\beta \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont incomparables pour l'ordre préfixe.}$$

↔ Tout invariant des relations ci-dessus donne une borne inférieure sur $|\cdot|_A$.

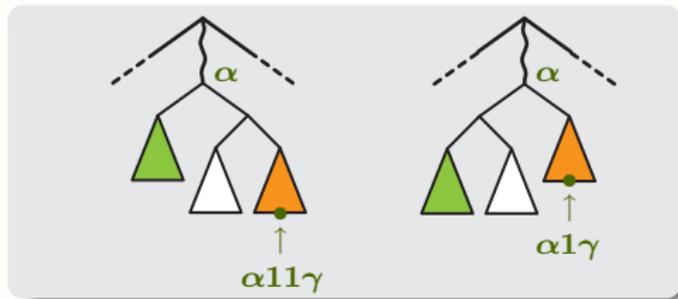
- **Proposition** : Pour tous arbres T, T' ,

$$\text{dist}(T, T') \geq |\sum \text{exposants des } A_{1^p} \text{ dans une expression de } \Phi(T, T')|.$$

élément de F associé à (T, T')

- **Corollaire** : $d(n) \geq n - 1$.

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$$

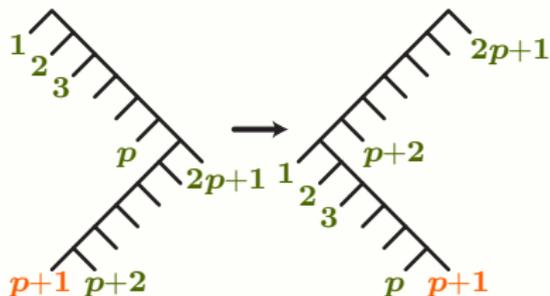
$$\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$$

$$\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$$

$$\beta \leftrightarrow \beta \text{ pour } \alpha$$

non préfixe de β

- Application:



adresse de la $(p+1)$ -ème feuille

dans T : $1^p 0^p$

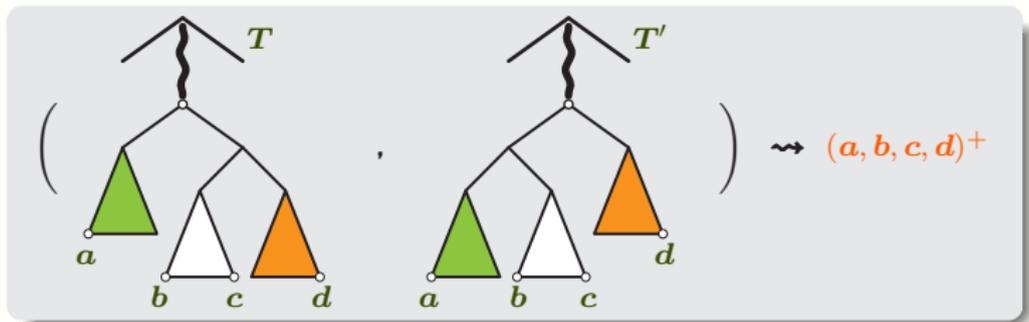
dans T' : $0^p 1^p$

$$\rightsquigarrow \text{dist}(T, T') \geq 3p - 2. \quad \square$$

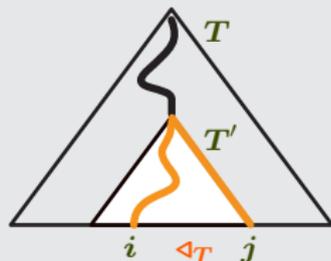
- Corollaire : $d(n) \geq \frac{3}{2}n - 2$.

4. Utiliser les noms :
la relation de recouvrement

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :

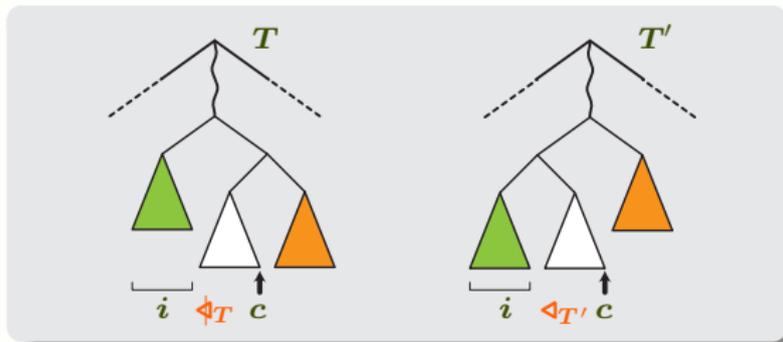


- Définition :** Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme :** Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$ ou $(i \in [a, b[$ et $j = c)$.



↪ Appliquer l'associativité (dans le sens positif) = **ajouter du recouvrement.**

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

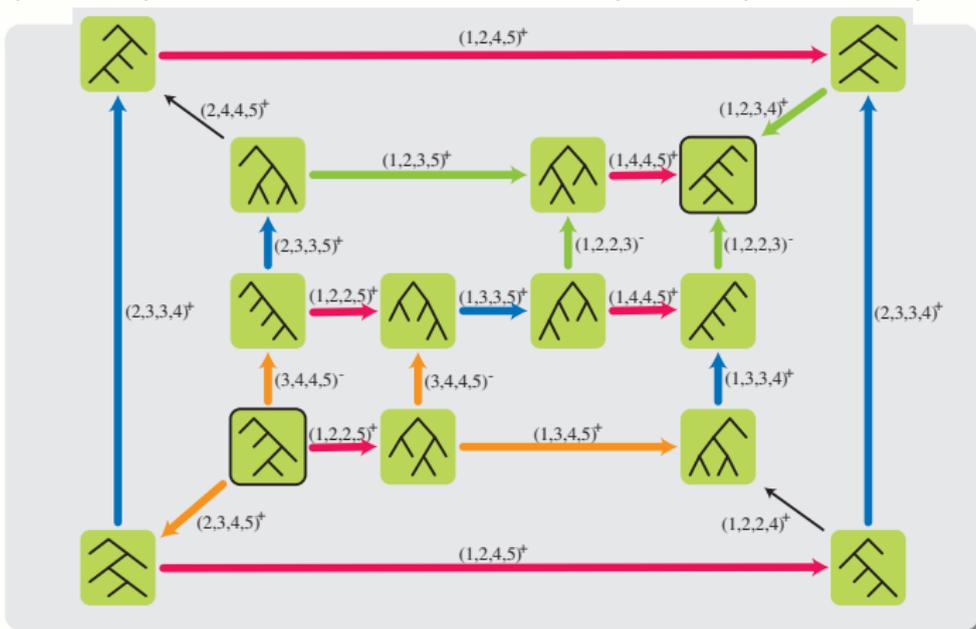
- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(a, j, j, \dots)^+$.

- Cas 1 : $i < a$. Alors i n'est pas couvert par j dans T_r . Donc, pour que i soit couvert par j dans T_ℓ , il faut après T_r une **autre** paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Cas 2 : $i \geq a$. Alors, par construction, i est couvert par $j-1$ dans T_r . Donc, pour que i ne soit pas couvert par $j-1$ dans T_ℓ , il faut après T_r une **autre** paire de nom $(\leq i, > i, j-1, \dots)^-$.



- Application: De  à , la distance est 4, car tout chemin contient au moins une paire de chacune des quatre couleurs :

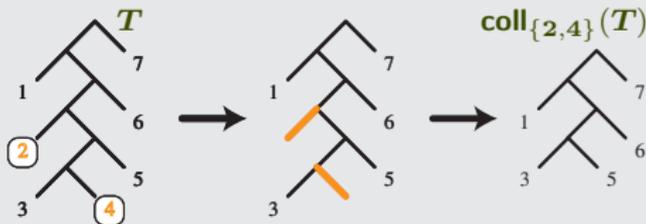


- Corollaire: $d(n) \geq \frac{3}{2}n - 2$.

**5. Utiliser les noms (suite) :
la relation d'effacement**

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors
 - ou bien $(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$ est une paire de base,
 - ou bien $\text{coll}_I(T) = \text{coll}_I(T')$ et on dit que (T, T') est **I -collapsante**.

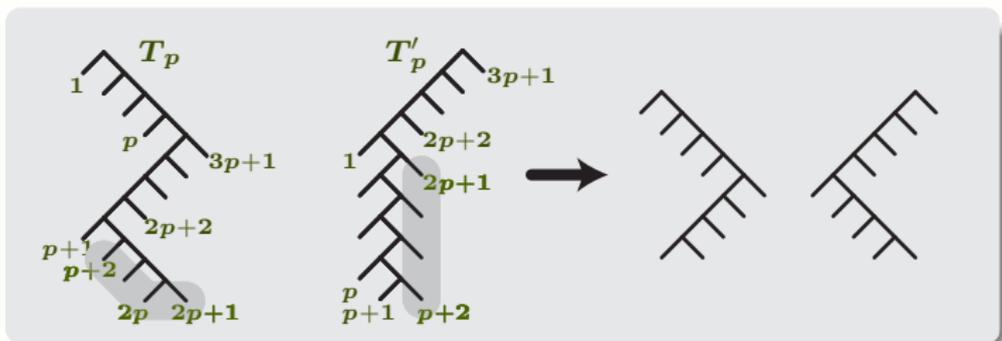
si le nom est $(a, b, c, d)^+$, se produit pour $[a, b] \subseteq I$ ou $[b, c] \subseteq I$ ou $[c, d] \subseteq I$.

- De là:

$$\text{dist}(T, T') \geq \text{dist}(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T')) + I\text{-dist}(T, T').$$

minimal de paires I -collapsantes de T à T'

- Mise en œuvre 1 :

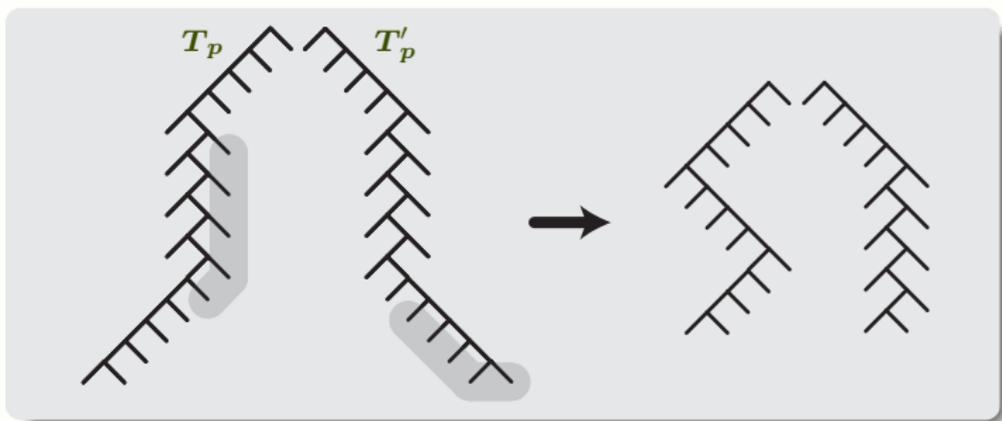


- Proposition:** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 5p - 4$.

- Démonstration:** Au moins $2p-2$ paires $\{p+2, 2p+1\}$ -collapsantes de T_p à T'_p , d'où distance $\geq (3p-2) + (2p-2)$. \square

- Corollaire:** $d(n) \geq \frac{5}{3}n - 3$.

- Mise en œuvre 2 :

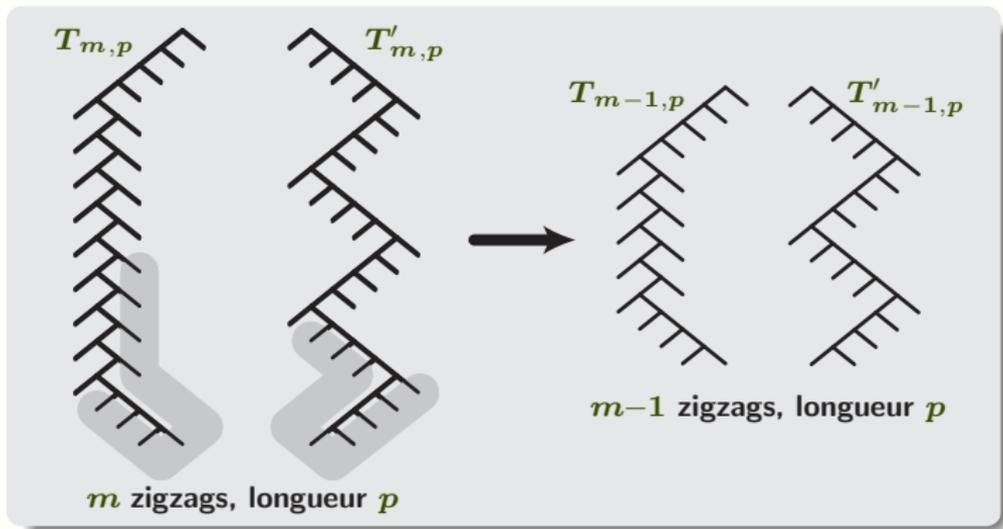


- Proposition :** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 7p - 5$.

- Démonstration :** Au moins $2p-1$ paires $\{2p+2, 3p+2\}$ -collapsantes de T_p à T'_p , d'où distance $\geq (5p-4) + (2p-1)$. \square

- Corollaire :** $d(n) \geq \frac{7}{4}n - 6$.

Mise en œuvre 3 :

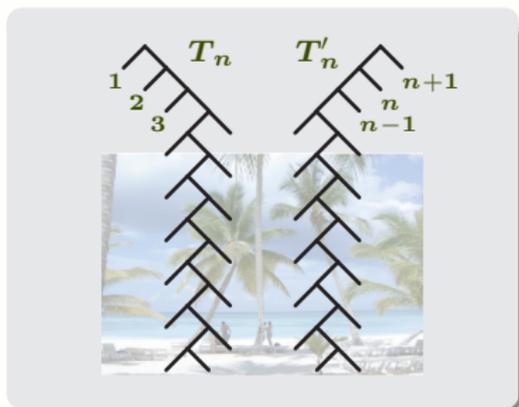


• **Proposition:** $\text{dist}(T_{m,p}, T'_{m,p}) = 4mp - 3m - p + 1$.

• **Démonstration:** De $T_{m,p}$ à $T'_{m,p}$, au moins $4p-3$ paires $\{(m-1)p+2, (m+1)p+1\}$ -collapsantes, et récurrence sur m . \square

• **Corollaire:** $d(n) \geq 2n - 2\sqrt{2n} + 1$ pour $n = 2m^2$.

- Une vision du paradis :



- **Conjecture** : $\text{dist}(T_n, T'_n) = 2n - 6$.

- Références :

D. Sleator, R. Tarjan, W. Thurston, Rotation distance, triangulations,
and hyperbolic geometry, *J. Amer. Math. Soc.* 1 (1988) 647–681

P. Dehornoy, On the rotation distance between binary trees,
[arXiv math/CO 0901.2557](https://arxiv.org/abs/math/0901.2557)