Dualité et séries formelles

Laurent Poinsot

LIPN UMR 7030 - Université Paris 13 - Institut Galilée

CIP

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. Si $\mathbb{K}^X$ est équipé de la topologie produit, alors son dual topologique est (isomorphe à) l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des applications à support fini de X dans $\mathbb{K}$.

(Une application $f : X \to \mathbb{K}$ est à support fini si, et seulement si, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est fini.)

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. Si $\mathbb{K}^X$ est équipé de la topologie produit, alors son dual topologique est (isomorphe à) l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des applications à support fini de X dans $\mathbb{K}$.

(Une application $f : X \to \mathbb{K}$ est à support fini si, et seulement si, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est fini.)

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. Si $\mathbb{K}^X$ est équipé de la topologie produit, alors son dual topologique est (isomorphe à) l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des applications à support fini de X dans $\mathbb{K}$.

(Une application $f : X \to \mathbb{K}$ est à support fini si, et seulement si, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est fini.)

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. Si $\mathbb{K}^X$ est équipé de la topologie produit, alors son dual topologique est (isomorphe à) l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des applications à support fini de X dans $\mathbb{K}$.

(Une application $f : X \to \mathbb{K}$ est à support fini si, et seulement si, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est fini.)

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. Si $\mathbb{K}^X$ est équipé de la topologie produit, alors son dual topologique est (isomorphe à) l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des applications à support fini de X dans $\mathbb{K}$.

(Une application $f : X \to \mathbb{K}$ est à support fini si, et seulement si, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est fini.)

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. Si $\mathbb{K}^X$ est équipé de la topologie produit, alors son dual topologique est (isomorphe à) l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des applications à support fini de X dans $\mathbb{K}$.

(Une application $f : X \to \mathbb{K}$ est à support fini si, et seulement si, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est fini.)

Comme corollaire du résultat précédent, sous les mêmes conditions, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des " matrices " dont chaque " ligne " est à support fini , *i.e.*, $M\colon X\times X\to\mathbb{K}$ tel que quel que soit $x\in X$, $\{\, y\in X \mid M(x,y)\neq 0 \,\}$ est fini.

Comme corollaire du résultat précédent, sous les mêmes conditions, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des “ matrices ” dont chaque “ ligne ” est à support fini , *i.e.*, $M\colon X\times X\to\mathbb{K}$ tel que quel que soit $x\in X$, $\{\, y\in X \mid M(x,y)\neq 0\,\}$ est fini.

Comme corollaire du résultat précédent, sous les mêmes conditions, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des " matrices " dont chaque " ligne " est à support fini , *i.e.*, $M\colon X \times X \to \mathbb{K}$ tel que quel que soit $x \in X$, $\{\, y \in X \mid M(x,y) \neq 0 \,\}$ est fini.

Convention

Dans cet exposé, on suppose que tous les anneaux considérés sont unitaires et commutatifs (et, évidemment, associatifs). Les modules sont également supposés unitaires ($1_R \cdot x = x$).

Convention

Dans cet exposé, on suppose que tous les anneaux considérés sont unitaires et commutatifs (et, évidemment, associatifs). Les modules sont également supposés unitaires ($1_R \cdot x = x$).

Topologie produit

Soit $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille (quelconque) d'espaces topologiques. On appelle topologie produit sur $\prod_{i \in I} E_i$ la topologie la moins fine (celle qui possède le moins d'ouverts) pour laquelle chaque projection $\pi_i : \prod_{i \in I} E_i \to E_i$ est continue. Les ouverts pour cette topologie sont les unions quelconques d'ensembles de la forme

$$\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) = \{ (x_i)_{i \in I} \mid \forall j \in J,\ x_j \in U_j \}$$

où J est un sous-ensemble fini de I, et pour chaque $j \in J$, $U_j \in \tau_j$ (c'est le produit dans la catégorie des espaces topologiques, et c'est un cas particulier de *topologie initiale*).

Cette topologie est séparée si, et seulement si, chaque τ_i est séparée.

Topologie produit

Soit $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) d'espaces topologiques. On appelle topologie produit sur $\prod_{i\in I} E_i$ la topologie la moins fine (celle qui possède le moins d'ouverts) pour laquelle chaque projection $\pi_i \colon \prod_{i\in I} E_i \to E_i$ est continue. Les ouverts pour cette topologie sont les unions quelconques d'ensembles de la forme

$$\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) = \{\, (x_i)_{i\in I} \mid \forall j \in J,\ x_j \in U_j \,\}$$

où J est un sous-ensemble fini de I, et pour chaque $j \in J$, $U_j \in \tau_j$ (c'est le produit dans la catégorie des espaces topologiques, et c'est un cas particulier de *topologie initiale*).

Cette topologie est séparée si, et seulement si, chaque τ_i est séparée.

Topologie produit

Soit $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) d'espaces topologiques. On appelle topologie produit sur $\prod_{i\in I} E_i$ la topologie la moins fine (celle qui possède le moins d'ouverts) pour laquelle chaque projection $\pi_i : \prod_{i\in I} E_i \to E_i$ est continue. Les ouverts pour cette topologie sont les unions quelconques d'ensembles de la forme

$$\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) = \{\, (x_i)_{i\in I} \mid \forall j \in J,\ x_j \in U_j \,\}$$

où J est un sous-ensemble fini de I, et pour chaque $j \in J$, $U_j \in \tau_j$ (c'est le produit dans la catégorie des espaces topologiques, et c'est un cas particulier de *topologie initiale*).
Cette topologie est séparée si, et seulement si, chaque τ_i est séparée.

Topologie produit

Soit $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) d'espaces topologiques. On appelle topologie produit sur $\prod_{i\in I} E_i$ la topologie la moins fine (celle qui possède le moins d'ouverts) pour laquelle chaque projection $\pi_i : \prod_{i\in I} E_i \to E_i$ est continue. Les ouverts pour cette topologie sont les unions quelconques d'ensembles de la forme

$$\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) = \{\, (x_i)_{i\in I} \mid \forall j \in J,\ x_j \in U_j \,\}$$

où J est un sous-ensemble fini de I, et pour chaque $j \in J$, $U_j \in \tau_j$ (c'est le produit dans la catégorie des espaces topologiques, et c'est un cas particulier de *topologie initiale*).

Cette topologie est séparée si, et seulement si, chaque τ_i est séparée.

Topologie produit

Soit $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) d'espaces topologiques. On appelle topologie produit sur $\prod_{i\in I} E_i$ la topologie la moins fine (celle qui possède le moins d'ouverts) pour laquelle chaque projection $\pi_i \colon \prod_{i\in I} E_i \to E_i$ est continue. Les ouverts pour cette topologie sont les unions quelconques d'ensembles de la forme

$$\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) = \{\, (x_i)_{i\in I} \mid \forall j \in J,\ x_j \in U_j \,\}$$

où J est un sous-ensemble fini de I, et pour chaque $j \in J$, $U_j \in \tau_j$ (c'est le produit dans la catégorie des espaces topologiques, et c'est un cas particulier de *topologie initiale*).
Cette topologie est séparée si, et seulement si, chaque τ_i est séparée.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\displaystyle\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Exemples (topologie produit)

1. Considérons $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La topologie produit (pour $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuel) sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie euclidienne usuelle. De même la topologie produit sur $\mathbb{C}^n$ correspond à la topologie d'espace hermitien habituelle.
2. Soit (E, τ) un espace topologique et X un ensemble quelconque. Considérons l'ensemble E^X de toutes les applications définies sur X et à valeurs dans E. Cet ensemble est visiblement en bijection avec le produit cartésien $\prod_{x \in X} E_x$, où $E_x = E$ quel que soit $x \in X$. On peut donc le munir de la topologie produit. La projection sur le facteur E_x correspond donc à l'évaluation $f \mapsto f(x)$ en x d'une application. Dans cette topologie produit, une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E. Cela correspond donc à la topologie de la convergence simple.

Anneaux topologiques

Soit R un anneau et τ une topologie sur R. On dit que (R, τ) est un **anneau topologique** si, et seulement si,

1. L'addition $(x, y) \in R \times R \mapsto x + y$ est continue ($R \times R$ reçoit la topologie produit) ;
2. L'application $x \mapsto -x$ est continue ;
3. L'application $(x, y) \in R \times R \mapsto xy$ est continue.

Les deux premiers axiomes indiquent que $(R, +, 0)$ est un **groupe (abélien) topologique**.

Anneaux topologiques

Soit R un anneau et τ une topologie sur R. On dit que (R, τ) est un anneau topologique si, et seulement si,

1. L'addition $(x, y) \in R \times R \mapsto x + y$ est continue ($R \times R$ reçoit la topologie produit) ;
2. L'application $x \mapsto -x$ est continue ;
3. L'application $(x, y) \in R \times R \mapsto xy$ est continue.

Les deux premiers axiomes indiquent que $(R, +, 0)$ est un groupe (abélien) topologique.

Anneaux topologiques

Soit R un anneau et τ une topologie sur R. On dit que (R, τ) est un anneau topologique si, et seulement si,

1. L'addition $(x, y) \in R \times R \mapsto x + y$ est continue ($R \times R$ reçoit la topologie produit) ;
2. L'application $x \mapsto -x$ est continue ;
3. L'application $(x, y) \in R \times R \mapsto xy$ est continue.

Les deux premiers axiomes indiquent que $(R, +, 0)$ est un groupe (abélien) topologique.

Anneaux topologiques

Soit R un anneau et τ une topologie sur R. On dit que (R, τ) est un anneau topologique si, et seulement si,

1. L'addition $(x, y) \in R \times R \mapsto x + y$ est continue ($R \times R$ reçoit la topologie produit) ;
2. L'application $x \mapsto -x$ est continue ;
3. L'application $(x, y) \in R \times R \mapsto xy$ est continue.

Les deux premiers axiomes indiquent que $(R, +, 0)$ est un groupe (abélien) topologique.

Anneaux topologiques

Soit R un anneau et τ une topologie sur R. On dit que (R, τ) est un anneau topologique si, et seulement si,

1. L'addition $(x, y) \in R \times R \mapsto x + y$ est continue ($R \times R$ reçoit la topologie produit) ;
2. L'application $x \mapsto -x$ est continue ;
3. L'application $(x, y) \in R \times R \mapsto xy$ est continue.

Les deux premiers axiomes indiquent que $(R, +, 0)$ est un groupe (abélien) topologique.

Anneaux topologiques

Soit R un anneau et τ une topologie sur R. On dit que (R,τ) est un anneau topologique si, et seulement si,

1. L'addition $(x,y) \in R \times R \mapsto x+y$ est continue ($R \times R$ reçoit la topologie produit) ;
2. L'application $x \mapsto -x$ est continue ;
3. L'application $(x,y) \in R \times R \mapsto xy$ est continue.

Les deux premiers axiomes indiquent que $(R,+,0)$ est un groupe (abélien) topologique.

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R, τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R, τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i \in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R, τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R, τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R, τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i \in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R, τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R, τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R, τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i \in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R, τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R, τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R, τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i \in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R, τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R, τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R, τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i \in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R, τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R, τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R, τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i \in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R, τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R, τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R, τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i \in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R, τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R,τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R,τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i,\tau_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i\in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R,τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Exemples

1. Soit R un anneau quelconque. Alors (R,τ) est un anneau topologique pour τ la topologie triviale ou la topologie discrète. Dans le premier cas, (R,τ) n'est pas séparée, alors qu'il l'est dans le second cas.
2. Soit $(R_i,\tau_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'anneaux topologiques. Alors le produit direct $\prod_{i\in I} R_i$ de ces anneaux, avec la topologie produit, est un anneau topologique. (Produit dans la catégorie des anneaux topologiques.)
3. Soient (R,τ) un anneau topologique et X un ensemble. L'anneau des applications R^X est un anneau topologique pour la topologie produit (on considère ici le produit de Hadamard, ou terme à terme, des applications).

Corps topologiques

Soit $\mathbb{K}$ un corps et τ une topologie sur $\mathbb{K}$. On dit que $(\mathbb{K}, \tau)$ est un corps topologique si, et seulement si,

1. $(\mathbb{K}, \tau)$ est un anneau topologique ;
2. $(\mathbb{K}^*, \times, 1)$ est un groupe topologique. (Il est suffisant de vérifier que l'inversion dans $\mathbb{K}^*$ est continue.)

Corps topologiques

Soit $\mathbb{K}$ un corps et τ une topologie sur $\mathbb{K}$. On dit que $(\mathbb{K}, \tau)$ est un corps topologique si, et seulement si,

1. $(\mathbb{K}, \tau)$ est un anneau topologique ;
2. $(\mathbb{K}^*, \times, 1)$ est un groupe topologique. (Il est suffisant de vérifier que l'inversion dans $\mathbb{K}^*$ est continue.)

Corps topologiques

Soit $\mathbb{K}$ un corps et τ une topologie sur $\mathbb{K}$. On dit que $(\mathbb{K}, \tau)$ est un corps topologique si, et seulement si,

1. $(\mathbb{K}, \tau)$ est un anneau topologique ;
2. $(\mathbb{K}^*, \times, 1)$ est un groupe topologique. (Il est suffisant de vérifier que l'inversion dans $\mathbb{K}^*$ est continue.)

Corps topologiques

Soit $\mathbb{K}$ un corps et τ une topologie sur $\mathbb{K}$. On dit que $(\mathbb{K}, \tau)$ est un corps topologique si, et seulement si,

1. $(\mathbb{K}, \tau)$ est un anneau topologique ;
2. $(\mathbb{K}^*, \times, 1)$ est un groupe topologique. (Il est suffisant de vérifier que l'inversion dans $\mathbb{K}^*$ est continue.)

Corps topologiques

Soit $\mathbb{K}$ un corps et τ une topologie sur $\mathbb{K}$. On dit que $(\mathbb{K}, \tau)$ est un corps topologique si, et seulement si,

1. $(\mathbb{K}, \tau)$ est un anneau topologique ;
2. $(\mathbb{K}^*, \times, 1)$ est un groupe topologique. (Il est suffisant de vérifier que l'inversion dans $\mathbb{K}^*$ est continue.)

Exemples

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ avec les topologies usuelles ;
2. Un corps avec la topologie triviale est un corps topologique non séparé. On peut montrer que c'est la seule topologie de corps non Hausdorff ;
3. (Więsław, Topological fields) Soit ϕ un automorphisme non continu (pour la topologie usuelle !) du corps des complexes, *i.e.*, ϕ n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe. L'application $(z, z') \mapsto |\phi(z) - \phi(z')|$ définie une métrique, laquelle induit une topologie de corps distincte de la topologie usuelle ;

Exemples

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ avec les topologies usuelles ;
2. Un corps avec la topologie triviale est un corps topologique non séparé. On peut montrer que c'est la seule topologie de corps non Hausdorff ;
3. (Więsław, Topological fields) Soit ϕ un automorphisme non continu (pour la topologie usuelle !) du corps des complexes, *i.e.*, ϕ n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe. L'application $(z, z') \mapsto |\phi(z) - \phi(z')|$ définie une métrique, laquelle induit une topologie de corps distincte de la topologie usuelle ;

Exemples

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ avec les topologies usuelles ;
2. Un corps avec la topologie triviale est un corps topologique non séparé. On peut montrer que c'est la seule topologie de corps non Hausdorff ;
3. (Więsław, Topological fields) Soit ϕ un automorphisme non continu (pour la topologie usuelle !) du corps des complexes, *i.e.*, ϕ n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe. L'application $(z, z') \mapsto |\phi(z) - \phi(z')|$ définie une métrique, laquelle induit une topologie de corps distincte de la topologie usuelle ;

Exemples

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ avec les topologies usuelles ;
2. Un corps avec la topologie triviale est un corps topologique non séparé. On peut montrer que c'est la seule topologie de corps non Hausdorff ;
3. (Więsław, Topological fields) Soit ϕ un automorphisme non continu (pour la topologie usuelle !) du corps des complexes, *i.e.*, ϕ n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe. L'application $(z, z') \mapsto |\phi(z) - \phi(z')|$ définie une métrique, laquelle induit une topologie de corps distincte de la topologie usuelle ;

Exemples

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ avec les topologies usuelles ;
2. Un corps avec la topologie triviale est un corps topologique non séparé. On peut montrer que c'est la seule topologie de corps non Hausdorff ;
3. (Więsław, Topological fields) Soit ϕ un automorphisme non continu (pour la topologie usuelle !) du corps des complexes, *i.e.*, ϕ n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe. L'application $(z, z') \mapsto |\phi(z) - \phi(z')|$ définie une métrique, laquelle induit une topologie de corps distincte de la topologie usuelle ;

Exemples

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ avec les topologies usuelles ;
2. Un corps avec la topologie triviale est un corps topologique non séparé. On peut montrer que c'est la seule topologie de corps non Hausdorff ;
3. (Więsław, Topological fields) Soit ϕ un automorphisme non continu (pour la topologie usuelle !) du corps des complexes, *i.e.*, ϕ n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe. L'application $(z, z') \mapsto |\phi(z) - \phi(z')|$ définie une métrique, laquelle induit une topologie de corps distincte de la topologie usuelle ;

Exemples

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ avec les topologies usuelles ;
2. Un corps avec la topologie triviale est un corps topologique non séparé. On peut montrer que c'est la seule topologie de corps non Hausdorff ;
3. (Więsław, Topological fields) Soit ϕ un automorphisme non continu (pour la topologie usuelle !) du corps des complexes, *i.e.*, ϕ n'est ni l'identité ni la conjugaison complexe. L'application $(z, z') \mapsto |\phi(z) - \phi(z')|$ définie une métrique, laquelle induit une topologie de corps distincte de la topologie usuelle ;

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$U_n = \{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \mid k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \left|\frac{k_i}{\ell_i}\right| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$\begin{aligned} U_n \quad = \quad \{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \quad | \quad & k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \\ & |\tfrac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \} \end{aligned}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$U_n = \{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \mid k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \ |\tfrac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$\begin{aligned} U_n &= \Big\{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \;\Big|\; k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \\ &\qquad |\tfrac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \Big\} \end{aligned}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$U_n = \{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \mid k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, |\tfrac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$\begin{aligned} U_n &= \{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \mid k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \\ &\qquad |\tfrac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \} \end{aligned}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$\begin{aligned} U_n &= \{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \mid k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \\ &\qquad |\tfrac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \} \end{aligned}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$U_n = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \;\middle|\; k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \left|\frac{k_i}{\ell_i}\right| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \right\}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$U_n = \{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \mid k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \\ |\frac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}} \}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Exemples (suite)

1. Soit p un nombre premier. Pour chaque entier naturel non nul n, on définit $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Cette fonction est étendue aux nombres rationnels : $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$. La norme p-adique est alors définie par $v_p(r) = p^{-v_p(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, et $v_p(0) = 0$. Cette norme définit la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}$, qui est distincte de la topologie usuelle ;
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers, et $(a_{i,j})_{j\leq i}$ une suite de nombres naturels. La collection des ensembles

$$U_n = \{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{k_i}{\ell_i} p_i \mid k_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \in \mathbb{N}^*,\ k_m = 0,\ m \text{ assez grand}, \\ |\frac{k_i}{\ell_i}| \leq a_{i,n},\ |\ell_i| \leq 2^{3^{i-n}}\}$$

définit une base de voisinages de zéro d'une topologie de corps sur $\mathbb{Q}$, $\neq$ des topologies usuelle et p-adiques (Mutylin, 1968).

Théorème (Podweski 1973, Kiltinen 1973)

Tout corps infini $\mathbb{K}$ admet $2^{2^{|\mathbb{K}|}}$ topologies de corps distinctes.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
   1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
   3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   4. $1x = x$

   quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
   1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
   3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   4. $1x = x$

   quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
    1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
    2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
    3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
    4. $1x = x$

    quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
   1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
   3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   4. $1x = x$

   quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
   1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
   3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   4. $1x = x$

   quels que soient $\lambda, \mu \in R, x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
    1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
    2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
    3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
    4. $1x = x$

    quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
   1. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$;
   2. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$;
   3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   4. $1x = x$

   quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
    1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
    2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
    3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
    4. $1x = x$

    quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
   1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
   3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   4. $1x = x$

   quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Modules, espaces vectoriels

Soit R un anneau. Un R-module M est

1. un groupe abélien $(M, +, 0)$
2. avec une application $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x \in M$ satisfaisant les axiomes suivants :
   1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
   3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   4. $1x = x$

   quels que soient $\lambda, \mu \in R$, $x, y \in M$.

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, on parle alors de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi\colon M \to N$ est dite *R-linéaire*, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M, M)$, et ses éléments sont appelés *endomorphismes de M*.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi\colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M,N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M,N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M,M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi\colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M, M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi\colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M, M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi \colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M,N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi+\psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M,N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M,M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi\colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M, M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi \colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M,N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi+\psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M,N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M,M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi \colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M, M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi\colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M, M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Homomorphismes de modules et module des homomorphismes

Soient R un anneau, M, N deux R-modules. Une application $\phi \colon M \to N$ est dite R-linéaire, si et seulement si,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;
2. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

quels que soient $x, y \in M$, $\lambda \in R$. L'ensemble $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ des applications R-linéaires de M dans N est naturellement muni d'une structure de R-module :

1. $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$;
2. $(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x))$

quels que soient $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, $\lambda \in R$. Lorsque $M = N$, on note $\mathsf{End}_R(M) = \mathsf{Hom}_R(M, M)$, et ses éléments sont appelés endomorphismes de M.

Modules et espaces vectoriels topologiques

Soient R un anneau topologique, M un R-module, et τ une topologie sur M. On dit que (M,τ) est un R-module topologique si, et seulement si,

1. $(M,+,0)$ est un groupe topologique ;
2. $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$ est continue de $R\times M$ dans M.

Si R est un corps topologique $\mathbb{K}$, alors on parle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.

Modules et espaces vectoriels topologiques

Soient R un anneau topologique, M un R-module, et τ une topologie sur M. On dit que (M, τ) est un R-module topologique si, et seulement si,

1. $(M, +, 0)$ est un groupe topologique ;
2. $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $R \times M$ dans M.

Si R est un corps topologique $\mathbb{K}$, alors on parle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.

Modules et espaces vectoriels topologiques

Soient R un anneau topologique, M un R-module, et τ une topologie sur M. On dit que (M, τ) est un R-module topologique si, et seulement si,

1. $(M, +, 0)$ est un groupe topologique ;
2. $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $R \times M$ dans M.

Si R est un corps topologique $\mathbb{K}$, alors on parle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.

Modules et espaces vectoriels topologiques

Soient R un anneau topologique, M un R-module, et τ une topologie sur M. On dit que (M,τ) est un R-module topologique si, et seulement si,

1. $(M,+,0)$ est un groupe topologique ;
2. $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ est continue de $R\times M$ dans M.

Si R est un corps topologique $\mathbb{K}$, alors on parle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.

Modules et espaces vectoriels topologiques

Soient R un anneau topologique, M un R-module, et τ une topologie sur M. On dit que (M, τ) est un R-module topologique si, et seulement si,

1. $(M, +, 0)$ est un groupe topologique ;
2. $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $R \times M$ dans M.

Si R est un corps topologique $\mathbb{K}$, alors on parle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\sum_{w\in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[x]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\sum_{w \in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[x]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\displaystyle\sum_{w\in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[x]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\sum_{w \in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[x]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\sum_{w\in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[x]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\displaystyle\sum_{w \in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[x]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\sum_{w \in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[x]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\displaystyle\sum_{w \in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[\mathrm{x}]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathrm{x}^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1. Soient R un anneau topologique et X un ensemble. L'ensemble R^X de toutes les applications de X dans R est un R-module topologique (avec la topologie de la convergence simple) ;
2. Soit R un anneau topologique et X un ensemble. La structure " linéaire " de l'algèbre $R\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries non commutatives sur X à coefficients dans R est un R-module topologique, toujours avec la topologie produit. (Ce module est isomorphe au module R^{X^*}, où X^* désigne le monoïde libre sur X : à toute série formelle $\displaystyle\sum_{w\in W^*} \alpha_w w$, on associe l'application $f : w \in X^* \mapsto \alpha_w \in R$.)
3. En particulier, $R[[\mathrm{x}]]$ est un R-module topologique. En tant que R-module topologique, il est isomorphe et homéomorphe à $R^{\mathbb{N}}$: à toute série formelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathrm{x}^n$, on associe la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dual algébrique, dual topologique

Soient R un anneau et M un R-module. Le R-module $\mathsf{Hom}_R(M, R)$ est appelé dual algébrique de M. Il est noté M^* (à ne pas confondre avec les étoiles $\mathbb{N}^*$, X^*, et autres C^*-algèbres ...) et ses éléments sont des formes linéaires.

Lorsque M est un R-module topologique, le sous-module M' de M^* constitué des formes linéaires et continues est appelé dual topologique de M. (Attention, M' n'est pas, *a priori*, un R-module **topologique**, ni même un espace topologique.)

Dual algébrique, dual topologique

Soient R un anneau et M un R-module. Le R-module $\mathsf{Hom}_R(M,R)$ est appelé dual algébrique de M. Il est noté M^* (à ne pas confondre avec les étoiles $\mathbb{N}^*$, X^*, et autres C^*-algèbres ...) et ses éléments sont des formes linéaires.

Lorsque M est un R-module topologique, le sous-module M' de M^* constitué des formes linéaires et continues est appelé dual topologique de M. (Attention, M' n'est pas, *a priori*, un R-module **topologique**, ni même un espace topologique.)

Dual algébrique, dual topologique

Soient R un anneau et M un R-module. Le R-module $\mathsf{Hom}_R(M,R)$ est appelé dual algébrique de M. Il est noté M^* (à ne pas confondre avec les étoiles $\mathbb{N}^*$, X^*, et autres C^*-algèbres ...) et ses éléments sont des formes linéaires.

Lorsque M est un R-module topologique, le sous-module M' de M^* constitué des formes linéaires et continues est appelé dual topologique de M. (Attention, M' n'est pas, *a priori*, un R-module **topologique**, ni même un espace topologique.)

Dual algébrique, dual topologique

Soient R un anneau et M un R-module. Le R-module $\mathsf{Hom}_R(M,R)$ est appelé dual algébrique de M. Il est noté M^* (à ne pas confondre avec les étoiles $\mathbb{N}^*$, X^*, et autres C^*-algèbres ...) et ses éléments sont des formes linéaires.

Lorsque M est un R-module topologique, le sous-module M' de M^* constitué des formes linéaires et continues est appelé dual topologique de M. (Attention, M' n'est pas, *a priori*, un R-module **topologique**, ni même un espace topologique.)

Dual algébrique, dual topologique

Soient R un anneau et M un R-module. Le R-module $\mathsf{Hom}_R(M,R)$ est appelé dual algébrique de M. Il est noté M^* (à ne pas confondre avec les étoiles $\mathbb{N}^*$, X^*, et autres C^*-algèbres ...) et ses éléments sont des formes linéaires.

Lorsque M est un R-module topologique, le sous-module M' de M^* constitué des formes linéaires et continues est appelé dual topologique de M. (Attention, M' n'est pas, *a priori*, un R-module **topologique**, ni même un espace topologique.)

Dual algébrique, dual topologique

Soient R un anneau et M un R-module. Le R-module $\mathsf{Hom}_R(M,R)$ est appelé dual algébrique de M. Il est noté M^* (à ne pas confondre avec les étoiles $\mathbb{N}^*$, X^*, et autres C^*-algèbres ...) et ses éléments sont des formes linéaires.
Lorsque M est un R-module topologique, le sous-module M' de M^* constitué des formes linéaires et continues est appelé dual topologique de M. (Attention, M' n'est pas, *a priori*, un R-module **topologique**, ni même un espace topologique.)

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda \ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell \colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda \ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e \colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell \colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda \ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e \colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda \ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell \colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e \colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell \colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda \ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e \colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell \colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e \colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Exemples

1. Soit R un anneau. Son dual algébrique s'identifie à R lui-même. En effet, soit $\ell\colon R \to R$ une forme linéaire : elle est entièrement déterminée par sa valeur en 1. ($\ell(\lambda) = \ell(\lambda 1) = \lambda\ell(1)$.)
2. Plus généralement, soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Alors V^* est isomorphe à V. En effet, soit B une base de V. On peut construire la base duale B^* comme l'ensemble des formes linéaires $\delta_e\colon e' \in B \mapsto \delta_e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour chaque $e \in B$. On montre que B^* forme une base de V^*.
3. Le dual algébrique de $R^{(X)}$ est R^X. En particulier, $(R[x])^* = R[[x]]$.
4. Le dual topologique d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ s'identifie canoniquement, *via* le produit scalaire, à $\mathcal{H}$ lui-même.

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array} .$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array} .$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array} .$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array} .$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{rcl} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y\rangle) \end{array}.$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y\rangle) \end{array} .$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{lll} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y\rangle) \end{array}.$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array} .$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array} .$$

Application (ou crochet) de dualité

Soient M et N deux R-modules. Une forme R-bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to R$ est un crochet de dualité si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in M \setminus \{0\}$, il existe $y \in N$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$;
2. quel que soit $y \in N \setminus \{0\}$, il existe $x \in M$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

On dit que M et N sont mis en dualité. La notation de la dualité par des crochets a été introduite en physique par P. Dirac, et, en combinatoire, par M.-P. Schützenberger. La première propriété indique que cette dualité est séparante (important pour obtenir une topologie faible séparée sur M). La seconde propriété permet d'identifier N comme sous-espace de M^* *via* la représentation (fidèle)

$$\begin{array}{ccc} N & \to & M^* \\ y & \mapsto & (\ell_y : x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array} .$$

Exemples

1. Soient M un R-module et M^* son dual algébrique. L'application $(x,\ell) \mapsto \langle x,\ell\rangle = \ell(x)$ est une application de dualité ;
2. Soient R un anneau et X un ensemble. L'application

$$\begin{array}{llll} \langle\cdot,\cdot\rangle & R^{(X)} \times R^X & \to & R \\ & (p,f) & \mapsto & \langle p,f\rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array}$$

est une application de dualité.

Exemples

1. Soient M un R-module et M^* son dual algébrique. L'application $(x, \ell) \mapsto \langle x, \ell \rangle = \ell(x)$ est une application de dualité ;
2. Soient R un anneau et X un ensemble. L'application

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle & R^{(X)} \times R^X & \to & R \\ & (p, f) & \mapsto & \langle p, f \rangle = \sum_{x \in X} p(x) f(x) \end{array}$$

est une application de dualité.

Exemples

1. Soient M un R-module et M^* son dual algébrique. L'application $(x,\ell) \mapsto \langle x,\ell\rangle = \ell(x)$ est une application de dualité ;
2. Soient R un anneau et X un ensemble. L'application

$$\begin{array}{llll} \langle\cdot,\cdot\rangle & R^{(X)} \times R^X & \to & R \\ & (p,f) & \mapsto & \langle p,f\rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array}$$

est une application de dualité.

Exemples

1. Soient M un R-module et M^* son dual algébrique. L'application $(x,\ell) \mapsto \langle x,\ell\rangle = \ell(x)$ est une application de dualité ;
2. Soient R un anneau et X un ensemble. L'application

$$\begin{array}{cccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & R^{(X)} \times R^X & \to & R \\ & (p,f) & \mapsto & \langle p,f\rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array}$$

est une application de dualité.

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé et X un ensemble. Le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'$ de $\mathbb{K}^X$ (avec la topologie produit) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé et X un ensemble. Le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'$ de $\mathbb{K}^X$ (avec la topologie produit) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

Lemme 1

Soient R un anneau, et X un ensemble. L'application

$$\begin{array}{llll} \Phi : & R^{(X)} & \to & (R^X)^* \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} \Phi(p) : & R^X & \to & R \\ & f & \mapsto & \langle p, f \rangle \end{array} \right) \end{array}$$

est R-linéaire et injective.

Lemme 1

Soient R un anneau, et X un ensemble. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & R^{(X)} & \to & (R^X)^* \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccc} \Phi(p): & R^X & \to & R \\ & f & \mapsto & \langle p, f \rangle \end{array} \right) \end{array}$$

est R-linéaire et injective.

Lemme 1

Soient R un anneau, et X un ensemble. L'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & R^{(X)} & \to & (R^X)^* \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{cccc} \Phi(p): & R^X & \to & R \\ & f & \mapsto & \langle p, f \rangle \end{array} \right) \end{array}$$

est R-linéaire et injective.

Preuve (Injectivité de Φ)

Puisque Φ est R-linéaire, il suffit de montrer que $\ker \Phi$ est réduit à la fonction identiquement nulle. Soit $p \in \ker \phi$, donc $\Phi(p)(f) = 0$ quel que soit $f \in R^X$. Soient $x \in X$, et $\delta_x \in R^X$ défini par $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, et $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Clairement, $p(x) = \Phi(p)(\delta_x) = 0$ quel que soit $x \in X$. Donc p est nul.

Preuve (Injectivité de Φ)

Puisque Φ est R-linéaire, il suffit de montrer que $\ker \Phi$ est réduit à la fonction identiquement nulle. Soit $p \in \ker \phi$, donc $\Phi(p)(f) = 0$ quel que soit $f \in R^X$. Soient $x \in X$, et $\delta_x \in R^X$ défini par $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, et $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Clairement, $p(x) = \Phi(p)(\delta_x) = 0$ quel que soit $x \in X$. Donc p est nul.

Preuve (Injectivité de Φ)

Puisque Φ est R-linéaire, il suffit de montrer que $\ker \Phi$ est réduit à la fonction identiquement nulle. Soit $p \in \ker \phi$, donc $\Phi(p)(f) = 0$ quel que soit $f \in R^X$. Soient $x \in X$, et $\delta_x \in R^X$ défini par $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, et $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Clairement, $p(x) = \Phi(p)(\delta_x) = 0$ quel que soit $x \in X$. Donc p est nul.

Preuve (Injectivité de Φ)

Puisque Φ est R-linéaire, il suffit de montrer que $\ker \Phi$ est réduit à la fonction identiquement nulle. Soit $p \in \ker \phi$, donc $\Phi(p)(f) = 0$ quel que soit $f \in R^X$. Soient $x \in X$, et $\delta_x \in R^X$ défini par $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, et $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Clairement, $p(x) = \Phi(p)(\delta_x) = 0$ quel que soit $x \in X$. Donc p est nul.

Preuve (Injectivité de Φ)

Puisque Φ est R-linéaire, il suffit de montrer que $\ker \Phi$ est réduit à la fonction identiquement nulle. Soit $p \in \ker \phi$, donc $\Phi(p)(f) = 0$ quel que soit $f \in R^X$. Soient $x \in X$, et $\delta_x \in R^X$ défini par $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, et $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Clairement, $p(x) = \Phi(p)(\delta_x) = 0$ quel que soit $x \in X$. Donc p est nul.

Preuve (Injectivité de Φ)

Puisque Φ est R-linéaire, il suffit de montrer que $\ker \Phi$ est réduit à la fonction identiquement nulle. Soit $p \in \ker \phi$, donc $\Phi(p)(f) = 0$ quel que soit $f \in R^X$. Soient $x \in X$, et $\delta_x \in R^X$ défini par $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, et $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Clairement, $p(x) = \Phi(p)(\delta_x) = 0$ quel que soit $x \in X$. Donc p est nul.

Preuve (Injectivité de Φ)

Puisque Φ est R-linéaire, il suffit de montrer que $\ker \Phi$ est réduit à la fonction identiquement nulle. Soit $p \in \ker \phi$, donc $\Phi(p)(f) = 0$ quel que soit $f \in R^X$. Soient $x \in X$, et $\delta_x \in R^X$ défini par $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, et $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Clairement, $p(x) = \Phi(p)(\delta_x) = 0$ quel que soit $x \in X$. Donc p est nul.

Lemme 2

Soient R un anneau topologique, et X un ensemble. On suppose que R^X dispose de la topologie produit. Quel que soit $p \in R^{(X)}$, $\Phi(p)$ est continue, *i.e.*, $\Phi(p) \in (R^{(X)})'$.

Lemme 2

Soient R un anneau topologique, et X un ensemble. On suppose que R^X dispose de la topologie produit. Quel que soit $p \in R^{(X)}$, $\Phi(p)$ est continue, *i.e.*, $\Phi(p) \in (R^{(X)})'$.

Lemme 2

Soient R un anneau topologique, et X un ensemble. On suppose que R^X dispose de la topologie produit. Quel que soit $p \in R^{(X)}$, $\Phi(p)$ est continue, *i.e.*, $\Phi(p) \in (R^{(X)})'$.

Lemme 2

Soient R un anneau topologique, et X un ensemble. On suppose que R^X dispose de la topologie produit. Quel que soit $p \in R^{(X)}$, $\Phi(p)$ est continue, *i.e.*, $\Phi(p) \in (R^{(X)})'$.

Preuve

C'est évident puisque $\Phi(p)$ est une somme finie de (multiples par des scalaires) de projections.

Incise : Séparation

Rappelons qu'un espace topologique (X, τ) est séparé (ou Hausdorff ou encore T_2) si, et seulement si, quel que soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $U_x, U_y \in \tau$, $x \in U_x$, $y \in U_y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. On peut montrer qu'un groupe topologique est séparé si, et seulement si, quel que soit $x \neq 0$, il existe $U \in \tau$ tel que $0 \in U$ et $x \notin U$.

Incise : Séparation

Rappelons qu'un espace topologique (X, τ) est séparé (ou Hausdorff ou encore T_2) si, et seulement si, quel que soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $U_x, U_y \in \tau$, $x \in U_x$, $y \in U_y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. On peut montrer qu'un groupe topologique est séparé si, et seulement si, quel que soit $x \neq 0$, il existe $U \in \tau$ tel que $0 \in U$ et $x \notin U$.

Incise : Séparation

Rappelons qu'un espace topologique (X, τ) est séparé (ou Hausdorff ou encore T_2) si, et seulement si, quel que soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $U_x, U_y \in \tau$, $x \in U_x$, $y \in U_y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. On peut montrer qu'un groupe topologique est séparé si, et seulement si, quel que soit $x \neq 0$, il existe $U \in \tau$ tel que $0 \in U$ et $x \notin U$.

Incise : Séparation

Rappelons qu'un espace topologique (X, τ) est séparé (ou Hausdorff ou encore T_2) si, et seulement si, quel que soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $U_x, U_y \in \tau$, $x \in U_x$, $y \in U_y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. On peut montrer qu'un groupe topologique est séparé si, et seulement si, quel que soit $x \neq 0$, il existe $U \in \tau$ tel que $0 \in U$ et $x \notin U$.

Incise : Séparation

Rappelons qu'un espace topologique (X, τ) est séparé (ou Hausdorff ou encore T_2) si, et seulement si, quel que soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $U_x, U_y \in \tau$, $x \in U_x$, $y \in U_y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. On peut montrer qu'un groupe topologique est séparé si, et seulement si, quel que soit $x \neq 0$, il existe $U \in \tau$ tel que $0 \in U$ et $x \notin U$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j \in J} g_j - g \in U \ .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k \in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k \in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i \in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j \in J} g_j - g \in U\ .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k \in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k \in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i \in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j \in J} g_j - g \in U .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k \in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k \in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i \in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j\in J} g_j - g \in U\ .$$
2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k\in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k\in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i\in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j\in J} g_j - g \in U \ .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k\in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k\in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i\in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j\in J} g_j - g \in U \ .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k\in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k\in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i\in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j \in J} g_j - g \in U \, .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k \in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k \in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i \in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j \in J} g_j - g \in U \ .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k \in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k \in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i \in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soit (G, τ) un groupe abélien topologique séparé. Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si, et seulement si, quel que soit $U \in \tau$ tel que $0 \in U$, il existe $J \subseteq I$ **fini** vérifiant
$$\sum_{j \in J} g_j - g \in U \ .$$

2. Soit $(G_k, \tau_k)_{k \in K}$ une famille de groupes abéliens topologiques séparés. Soit $G = \prod_{k \in K} G_k$ le produit direct des groupes, avec la topologie produit (qui est séparée). Une famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est sommable de somme $g \in G$, si et seulement si, pour chaque $k \in K$, la famille $(\pi_k(g_i))_{i \in I}$ est sommable dans G_k de somme $\pi_k(g)$.

Incise : Sommabilité

1. Soient G, H deux groupes abéliens topologiques séparés. Soit $\phi\colon G \to H$ un morphisme de groupes continu. Si $(g_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de G de somme g, alors $(\phi(g_i))_{i\in I}$ est une famille sommable de H de somme $\phi(g)$.
2. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments d'un groupe abélien topologique séparé G. Quel que soit le voisinage V de l'identité de G, $g_i \in V$ sauf pour un nombre fini d'indice $i \in I$.

Incise : Sommabilité

1. Soient G, H deux groupes abéliens topologiques séparés. Soit $\phi\colon G \to H$ un morphisme de groupes continu. Si $(g_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de G de somme g, alors $(\phi(g_i))_{i\in I}$ est une famille sommable de H de somme $\phi(g)$.
2. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments d'un groupe abélien topologique séparé G. Quel que soit le voisinage V de l'identité de G, $g_i \in V$ sauf pour un nombre fini d'indice $i \in I$.

Incise : Sommabilité

1. Soient G, H deux groupes abéliens topologiques séparés. Soit $\phi \colon G \to H$ un morphisme de groupes continu. Si $(g_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de G de somme g, alors $(\phi(g_i))_{i \in I}$ est une famille sommable de H de somme $\phi(g)$.
2. Soit $(g_i)_{i \in I}$ une famille sommable d'éléments d'un groupe abélien topologique séparé G. Quel que soit le voisinage V de l'identité de G, $g_i \in V$ sauf pour un nombre fini d'indice $i \in I$.

Incise : Sommabilité

1. Soient G, H deux groupes abéliens topologiques séparés. Soit $\phi\colon G \to H$ un morphisme de groupes continu. Si $(g_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de G de somme g, alors $(\phi(g_i))_{i\in I}$ est une famille sommable de H de somme $\phi(g)$.
2. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments d'un groupe abélien topologique séparé G. Quel que soit le voisinage V de l'identité de G, $g_i \in V$ sauf pour un nombre fini d'indice $i \in I$.

Incise : Sommabilité

1. Soient G, H deux groupes abéliens topologiques séparés. Soit $\phi\colon G \to H$ un morphisme de groupes continu. Si $(g_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de G de somme g, alors $(\phi(g_i))_{i\in I}$ est une famille sommable de H de somme $\phi(g)$.
2. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments d'un groupe abélien topologique séparé G. Quel que soit le voisinage V de l'identité de G, $g_i \in V$ sauf pour un nombre fini d'indice $i \in I$.

Incise : Sommabilité

1. Soient G, H deux groupes abéliens topologiques séparés. Soit $\phi \colon G \to H$ un morphisme de groupes continu. Si $(g_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de G de somme g, alors $(\phi(g_i))_{i\in I}$ est une famille sommable de H de somme $\phi(g)$.
2. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments d'un groupe abélien topologique séparé G. Quel que soit le voisinage V de l'identité de G, $g_i \in V$ sauf pour un nombre fini d'indice $i \in I$.

Incise : Sommabilité

Attention, la convergence d'une série n'implique par la sommabilité de la famille associée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers $-\ln(2)$ mais n'est la famille $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$ n'est pas sommable. Par contre, si une famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme g, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ converge vers g.

Incise : Sommabilité

Attention, la convergence d'une série n'implique par la sommabilité de la famille associée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers $-\ln(2)$ mais n'est la famille $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$ n'est pas sommable. Par contre, si une famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme g, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ converge vers g.

Incise : Sommabilité

Attention, la convergence d'une série n'implique par la sommabilité de la famille associée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers $-\ln(2)$ mais n'est la famille $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$ n'est pas sommable. Par contre, si une famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme g, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ converge vers g.

Lemme 3

Soit R un anneau topologique Hausdorff, et supposons que R^X dispose de la topologie produit. Quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x \in X} = (\langle \delta_x, f \rangle \delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme f.

Lemme 3

Soit R un anneau topologique Hausdorff, et supposons que R^X dispose de la topologie produit. Quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X} = (\langle \delta_x, f\rangle \delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f.

Preuve

D'après la définition de la topologie produit, il suffit de démontrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\pi_y(f(x)\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\pi_y(f)$, où $\pi_y : R^X \to R$ est la projection sur $R(= R_y)$. Or cette projection est donnée par $f \mapsto \langle \delta_y, f\rangle$. Il s'agit donc de montrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\langle \delta_y, f(x)\delta_x\rangle)_{x\in X} = (f(x)\delta_y(x))_{x\in X}$ est sommable de somme $f(y)$, ce qui est évident.

Preuve

D'après la définition de la topologie produit, il suffit de démontrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\pi_y(f(x)\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\pi_y(f)$, où $\pi_y \colon R^X \to R$ est la projection sur $R(=R_y)$. Or cette projection est donnée par $f \mapsto \langle \delta_y, f\rangle$. Il s'agit donc de montrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\langle \delta_y, f(x)\delta_x\rangle)_{x\in X} = (f(x)\delta_y(x))_{x\in X}$ est sommable de somme $f(y)$, ce qui est évident.

Preuve

D'après la définition de la topologie produit, il suffit de démontrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\pi_y(f(x)\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\pi_y(f)$, où $\pi_y \colon R^X \to R$ est la projection sur $R (= R_y)$. Or cette projection est donnée par $f \mapsto \langle \delta_y, f \rangle$. Il s'agit donc de montrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\langle \delta_y, f(x)\delta_x \rangle)_{x\in X} = (f(x)\delta_y(x))_{x\in X}$ est sommable de somme $f(y)$, ce qui est évident.

Preuve

D'après la définition de la topologie produit, il suffit de démontrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\pi_y(f(x)\delta_x))_{x \in X}$ est sommable dans R, de somme $\pi_y(f)$, où $\pi_y \colon R^X \to R$ est la projection sur $R(= R_y)$. Or cette projection est donnée par $f \mapsto \langle \delta_y, f \rangle$. Il s'agit donc de montrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\langle \delta_y, f(x)\delta_x \rangle)_{x \in X} = (f(x)\delta_y(x))_{x \in X}$ est sommable de somme $f(y)$, ce qui est évident.

Preuve

D'après la définition de la topologie produit, il suffit de démontrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\pi_y(f(x)\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\pi_y(f)$, où $\pi_y \colon R^X \to R$ est la projection sur $R(=R_y)$. Or cette projection est donnée par $f \mapsto \langle \delta_y, f\rangle$. Il s'agit donc de montrer que quel que soit $y \in X$, la famille $(\langle \delta_y, f(x)\delta_x\rangle)_{x\in X} = (f(x)\delta_y(x))_{x\in X}$ est sommable de somme $f(y)$, ce qui est évident.

Lemme 4

Sous les mêmes hypothèses que le lemme 3, si $\ell \in (R^X)'$, alors $Y_\ell = \{\, x \in X \mid \ell(\delta_x) \text{ est inversible dans } R \,\}$ est fini.

Lemme 4

Sous les mêmes hypothèses que le lemme 3, si $\ell \in (R^X)'$, alors $Y_\ell = \{ x \in X \mid \ell(\delta_x) \text{ est inversible dans } R \}$ est fini.

Lemme 4

Sous les mêmes hypothèses que le lemme 3, si $\ell \in (R^X)'$, alors $Y_\ell = \{ x \in X \mid \ell(\delta_x) \text{ est inversible dans } R \}$ est fini.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x \in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Preuve

Puisque ℓ est linéaire et continue, et que quel que soit $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f (par le lemme 3), la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x\in X}$ est sommable dans R, de somme $\ell(f)$. Définissons $f : X \to R$ par $f(x) = \ell(\delta_x)^{-1}$ si $x \in Y_\ell$, et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. En particulier, la famille $(f(x)\delta_x)_{x\in X}$ est sommable de somme f. On sait que quel que soit U, voisinage ouvert de 0 dans R, $f(x)\delta_x \in U$ pour tous les éléments $x \in X$, excepté un nombre fini. Puisque R est supposé séparé, il existe un voisinage ouvert U de zéro pour lequel $1 \notin U$. Si Y n'est pas fini, alors $1 = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y$, ce qui conduit à une contradiction.

Lemme 5

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé. Si $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$, alors $\ell(\delta_x) = 0$ pour tout $x \in X$, hormis un nombre fini.

Lemme 5

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé. Si $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$, alors $\ell(\delta_x) = 0$ pour tout $x \in X$, hormis un nombre fini.

Lemme 5

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé. Si $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$, alors $\ell(\delta_x) = 0$ pour tout $x \in X$, hormis un nombre fini.

Preuve

Il suffit d'appliquer le lemme 4 dans la mesure où l'on a
$\{\, x \in X \mid \ell(\delta_x) \text{ est inversible} \,\} = \{\, x \in X \mid \ell(\delta_x) \neq 0 \,\}$.

Preuve

Il suffit d'appliquer le lemme 4 dans la mesure où l'on a $\{\, x \in X \mid \ell(\delta_x) \text{ est inversible} \,\} = \{\, x \in X \mid \ell(\delta_x) \neq 0 \,\}$.

Lemme 6

Sous les mêmes hypothèses que le lemme 5, $\Phi : \mathbb{K}^{(X)} \to (\mathbb{K}^X)'$ est surjective.

Lemme 6

Sous les mêmes hypothèses que le lemme 5, $\Phi \colon \mathbb{K}^{(X)} \to (\mathbb{K}^X)'$ est surjective.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccc} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array} \right) \end{array} .$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccc} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \displaystyle\sum_{x \in X} p(x)f(x) \end{array} \right) \end{array} .$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x \in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x \in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccl} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f \rangle = \displaystyle\sum_{x \in X} p(x) f(x) \end{array} \right) \end{array} .$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f \rangle = \sum_{x \in X} p_\ell(x) f(x) = \sum_{x \in X} \ell(\delta_x) f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{rccc}\Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccl}\Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \displaystyle\sum_{x\in X} p(x)f(x)\end{array}\right)\end{array}.$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccl} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \displaystyle\sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array} \right) \end{array}.$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x) f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x) f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{llll} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \displaystyle\sum_{x \in X} p(x) f(x) \end{array} \right) . \end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x \in X} p_\ell(x) f(x) = \sum_{x \in X} \ell(\delta_x) f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{llll}\Phi: & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{llll}\Phi(p): & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p,f\rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x)\end{array}\right).\end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \rightarrow & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccc} \Phi(p) : & X & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \displaystyle\sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array} \right) \end{array} .$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \rightarrow \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x) f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x) f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{cccc} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p,f\rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array} \right) . \end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{rccl} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f \rangle = \displaystyle\sum_{x \in X} p(x) f(x) \end{array} \right) . \end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f \rangle = \sum_{x \in X} p_\ell(x) f(x) = \sum_{x \in X} \ell(\delta_x) f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{llll} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f \rangle = \displaystyle\sum_{x \in X} p(x) f(x) \end{array} \right) . \end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f \rangle = \sum_{x \in X} p_\ell(x) f(x) = \sum_{x \in X} \ell(\delta_x) f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{cccc} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p,f \rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array} \right) . \end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f \rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{cccc} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array} \right) . \end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Preuve

Rappelons la définition de Φ

$$\begin{array}{llll} \Phi : & \mathbb{K}^{(X)} & \to & (\mathbb{K}^X)' \\ & p & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} \Phi(p) : & X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \langle p, f\rangle = \displaystyle\sum_{x\in X} p(x)f(x) \end{array} \right) . \end{array}$$

Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$ fixée, et définissons $p_\ell : X \to \mathbb{K}$ par $p_\ell(x) = \ell(x)$. *A priori* $p_\ell \in \mathbb{K}^X$, mais par le lemme 5, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle p_\ell, f\rangle = \sum_{x\in X} p_\ell(x)f(x) = \sum_{x\in X} \ell(\delta_x)f(x) = \ell(f)$$

de sorte que $\Phi(p_\ell) = \ell$.

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé et X un ensemble. Le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'$ de $\mathbb{K}^X$ (avec la topologie produit) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

Théorème

Soient $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé et X un ensemble. Le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'$ de $\mathbb{K}^X$ (avec la topologie produit) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

Preuve

Lemme 1 (injectivité de Φ),
Lemme 2 ($\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq (\mathbb{K}^X)'$),
Lemme 6 (surjectivité de Φ).

Preuve

Lemme 1 (injectivité de Φ),
Lemme 2 ($\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq (\mathbb{K}^X)'$),
Lemme 6 (surjectivité de Φ).

Preuve

Lemme 1 (injectivité de Φ),
Lemme 2 ($\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq (\mathbb{K}^X)'$),
Lemme 6 (surjectivité de Φ).

Preuve

Lemme 1 (injectivité de Φ),
Lemme 2 ($\mathsf{Im}(\Phi) \subseteq (\mathbb{K}^X)'$),
Lemme 6 (surjectivité de Φ).

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Exemple

L'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ peut être muni (d'au moins) deux topologies :

1. La topologie de la valuation (ou topologie $\mathfrak{M}$-adique pour $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant) : on suppose $\mathbb{C}$ discret, et on considère la topologie produit sur $\mathbb{C}[[x]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Utilisée par les algébristes et combinatoristes ;
2. La topologie de la convergence simple : on suppose que $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle, et $\mathbb{C}[[x]]$ de la topologie produit : on obtient un espace (et même une algèbre) de Fréchet. Utilisée par les spécialistes d'analyse fonctionnelle et les physiciens.

Le théorème précédent indique que les formes linéaires $\mathbb{C}[[x]]$ continues pour l'une ou l'autre des topologies sont les mêmes ! Et s'identifient aux polynômes.

Quelques notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. On continue de supposer que l'espace vectoriel $\mathbb{K}^X$ dispose de la topologie produit. On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$. On définit également l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des applications $M : X \times X \to \mathbb{K}$ telles que quel que soit $x \in X$, $\{\, y \in X \mid M(x,y) \neq 0 \,\}$ est fini. (Dans le cas où $X = \mathbb{N}$, ces applications sont des matrices infinies dont les colonnes sont à support fini.)

Quelques notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. On continue de supposer que l'espace vectoriel $\mathbb{K}^X$ dispose de la topologie produit. On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$. On définit également l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des applications $M : X \times X \to \mathbb{K}$ telles que quel que soit $x \in X$, $\{\, y \in X \mid M(x,y) \neq 0 \,\}$ est fini. (Dans le cas où $X = \mathbb{N}$, ces applications sont des matrices infinies dont les colonnes sont à support fini.)

Quelques notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. On continue de supposer que l'espace vectoriel $\mathbb{K}^X$ dispose de la topologie produit. On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$. On définit également l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des applications $M\colon X \times X \to \mathbb{K}$ telles que quel que soit $x \in X$, $\{\, y \in X \mid M(x,y) \neq 0 \,\}$ est fini. (Dans le cas où $X = \mathbb{N}$, ces applications sont des matrices infinies dont les colonnes sont à support fini.)

Quelques notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. On continue de supposer que l'espace vectoriel $\mathbb{K}^X$ dispose de la topologie produit. On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$. On définit également l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des applications $M : X \times X \to \mathbb{K}$ telles que quel que soit $x \in X$, $\{\, y \in X \mid M(x,y) \neq 0 \,\}$ est fini. (Dans le cas où $X = \mathbb{N}$, ces applications sont des matrices infinies dont les colonnes sont à support fini.)

Quelques notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique séparé, et X un ensemble. On continue de supposer que l'espace vectoriel $\mathbb{K}^X$ dispose de la topologie produit. On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^X)$ l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathbb{K}^X$. On définit également l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{X\times(X)}$ des applications $M \colon X \times X \to \mathbb{K}$ telles que quel que soit $x \in X$, $\{\, y \in X \mid M(x,y) \neq 0 \,\}$ est fini. (Dans le cas où $X = \mathbb{N}$, ces applications sont des matrices infinies dont les colonnes sont à support fini.)

Corollaire

L'application

$$M: \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{K}^X) & \to & \mathbb{K}^{X\times(X)} \\ \phi & \mapsto & \left(\begin{array}{cccc} M_\phi : & X\times X & \to & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle \delta_x, \phi(\delta_y)\rangle \end{array} \right) \end{array}$$

est bijective.

Corollaire

L'application

$$\begin{array}{rccc} M: & \mathcal{L}(\mathbb{K}^X) & \to & \mathbb{K}^{X\times(X)} \\ & \phi & \mapsto & \left(\begin{array}{rccc} M_\phi: & X\times X & \to & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle \delta_x, \phi(\delta_y)\rangle \end{array}\right) \end{array}$$

est bijective.

Rappels : topologie faible

Soit (V, τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V, τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V, τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V, τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V,τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie.

Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V,τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V, τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V, τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V, τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V, τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V, τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V, τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V,τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V,τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V,τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V,τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V,τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V,τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Rappels : topologie faible

Soit (V, τ) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, et V' son dual topologique. On appelle V'-topologie faible la topologie la moins fine sur V rendant continues les éléments de V'. Notons τ_w cette topologie. Puisque les éléments de V' sont continues (pour τ), on a nécessairement $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer que (V, τ_w) est également un espace vectoriel topologique, séparé à la condition que $\mathbb{K}$ le soit, et que V' sépare les points de V.

Corollaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps avec une topologie séparée $\tau_{\mathbb{K}}$, X un ensemble, et supposons que $\mathbb{K}^X$ possède la topologie produit. Alors le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'_w$ (de $\mathbb{K}^X$ pour la topologie faible) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.

(Notons que $\mathbb{K}^{(X)}$ sépare les points de $\mathbb{K}^X$.)

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} : (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} : (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle \colon \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} \colon (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot\rangle \colon \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot\rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} \colon (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f\rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} : (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} : (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle \colon \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} \colon (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$.

Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} : (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathrm{id} : (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle \colon \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} \colon (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot \rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot \rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id} \colon (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f \rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.

Preuve

Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$). Donc $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Nous allons démontrer que les deux topologies sont en fait identiques. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $\langle p, \cdot\rangle : \mathbb{K}^X \to (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En particulier, les projections $\langle \delta_x, \cdot\rangle$ sont continues. Il en résulte que τ_w est plus forte que la topologie produit $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}})$ des $|X|$ copies de $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}^X$ (puisque cette dernière est la moins fine des topologies ayant cette propriété). On a donc $\pi(X, \tau_{\mathbb{K}}) \subseteq \tau_w$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application identique $\mathsf{id}\colon (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \to (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent au fait que quel que soit, $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, $f \in (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau_{\mathbb{K}})) \mapsto \langle p, f\rangle \in (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ est continue, ce qui est évidemment le cas, puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de (multiples par des scalaires de) projections.