Examen (Corrigé)

Durée 2 heures

Seuls les documents de cours sont autorisés. Les sujets de TD, et leurs corrigés, ne sont pas autorisés, tout comme ne le sont pas les calculettes, les calculatrices scientifiques, les ordinateurs et les téléphones portables. Le niveau de rigueur attendu est identique à celui des corrections des TD et des preuves vues en cours.

NOM

Prénom

Brigade

Exercice 1

1. La fonction $f(z) = \Re(z)$ est-elle holomorphe ? Justifier votre réponse.
2. Soit la fonction $f(z) = \log(1 + z^2)$, où $\log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme complexe. Trouver le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ dans lequel f est holomorphe.
3. Trouver une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la partie réelle est $P(z) = e^{\Re(z)^2-\Im(z)^2}\cos(2\Re(z)\Im(z))$.

Solution 1

1. f n'est pas holomorphe. Posons $P(x, y) = \Re(f(x + iy)) = x$ et $Q(x, y) = \Im(f(x + iy)) = 0$, de sorte que $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0$. Les équations de Cauchy-Riemann ne sont donc pas vérifiées.
2. La fonction $z \mapsto 1 + z^2$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, et log est holomorphe dans le plan fendu $P = \mathbb{C}\setminus]-\infty; 0]$. La fonction f est donc holomorphe dans $D := \{ z \in \mathbb{C}\colon 1 + z^2 \in P \} = \mathbb{C} \setminus \underbrace{\{ z \in \mathbb{C}\colon \Im(1 + z^2) = 0,\ \Re(1 + z^2) \leq 0 \}}_{:=Q}$. Déterminons l'ensemble Q.

   Soit $z = x + iy$, de sorte que $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. On a $\Im(1 + z^2) = 2xy = 0$ et $\Re(1+z^2) = 1+x^2-y^2 \leq 0$ si et seulement si $x = \Re(z) = 0$ et $y^2 \geq 1$. (Le cas $y = 0$ et $1+x^2 \geq 0$ est bien entendu à exclure.) Donc $D = \mathbb{C}\setminus\{ z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) = 0,\ |\Im(z)| \geq 1 \}$.
3. On veut trouver une fonction $f(z) = P(z) + iQ(z)$ où $P(z) = \Re(f(z))$. Écrivons les conditions de Cauchy-Riemann : $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 2e^{x^2-y^2}(x \cos 2xy - y \sin 2xy)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 2e^{x^2-y^2}(y \cos 2xy+x \sin 2xy)$. Si on intègre la seconde équation, on obtient $Q(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin 2xy + \phi(y)$. On injecte ce résultat dans la première équation : $\phi'(y) = 0$ et donc $\phi(y)$ est une constante $\phi_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi $Q(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)+\phi_0$, et donc $f(x + iy) = e^{x^2-y^2+i2xy} + i\phi_0 = e^{z^2} + i\phi_0$.

Exercice 2

1. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2+2z+\sin(z+1)}{(z-2)^2}dz$ où γ parcourt $\{\, z \in \mathbb{C} \colon |z-2| = 1 \,\}$ une fois dans le sens direct.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_j} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$, $j = 1, 2$, où
   (a) γ_1 est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, dans le sens direct.
   (b) γ_2 est le bord du rectangle $[-1, 0] \times [-1/2, 1/2]$, dans le sens direct.
3. Supposons que γ désigne un cercle parcouru une fois dans le sens direct. Discuter, en fonction de γ, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$.

Solution 2

1. D'après la formule intégrale de Cauchy, on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2+2z+\sin(z+1)}{(z-2)^2}dz = 2i\pi f'(2)$ où $f(z) = 3z^2+2z+\sin(z+1)$. On a $f'(z) = 6z+2+\cos(z+1)$, de sorte que $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2+2z+\sin(z+1)}{(z-2)^2}dz = 2i\pi(14+\cos(3))$.
2. (a) Pour $j = 1$, 1 est dans l'intérieur du cercle $|z-1| = 1$ (c'est son centre). Posons $f(z) = \frac{e^{z^2}}{(z^2+4)}$. f est holomorphe dans le cercle $|z-1| = 1$ et donc, par la formule intégrale de Cauchy, $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2i\pi f'(1)$. Or $f'(z) = \dfrac{2ze^{z^2}(z^2+3)}{(z^2+4)^2}$ et donc $f'(1) = \frac{8}{25}e$, soit $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = \frac{16}{25}i\pi e$.
   (b) Pour $j = 2$, la fonction $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}$ est holomorphe dans le rectangle en question. Il résulte de la première formule de Cauchy que $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 0$.
3. Soit D le disque fermé dont γ parcourt le bord.
   (a) Supposons que 1 n'est pas dans l'intérieur de D. Alors $f(z) = \dfrac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}$ est holomorphe dans D et donc par la première formule de Cauchy $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz = 0$.
   (b) Supposons que 1 est dans l'intérieur de D. Alors on peut appliquer la formule intégrale de Cauchy à $f(z) = 5z^2-3z+2$ en $z = 1$, et donc $10i\pi = i\pi f''(1) = \displaystyle\int_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$.
   (c) Si 1 est sur le bord de D, alors l'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 3

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(5\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}d\theta$. (Indication : exprimer $\dfrac{\sin^2(5\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$ comme une fraction rationnelle $f(z)$ en la variable $z = e^{i\theta}$, puis considérer l'intégrale à calculer comme une intégrale curviligne de $\frac{f(z)}{z}$.)

Solution 3
Posons $z = e^{i\theta}$. On a $\sin\frac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2i}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}) = \dfrac{z-1}{2iz^{\frac{1}{2}}}$ et $\sin\frac{5\theta}{2} = \frac{1}{2i}(e^{5i\frac{\theta}{2}} - e^{-5i\frac{\theta}{2}}) = \dfrac{z^5-1}{2iz^{\frac{5}{2}}}$. Et donc $\left(\dfrac{\sin\frac{5\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{z^5-1}{(z-1)z^2}\right)^2 = \dfrac{(z^4+z^3+z^2+z+1)^2}{z^4} := f(z)$. Donc $f(e^{i\theta}) = \dfrac{\sin^2(5\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$. Si γ désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(5\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} d\theta = \int_\gamma \frac{f(z)}{iz} dz$ (en effet, en utilisant la paramétrisation $\gamma(t) = e^{it}$, on obtient $\int_\gamma \frac{f(z)}{iz} dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-it}\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it})dt$). La fonction $g(z) = \frac{f(z)}{iz} = \dfrac{(z^4+z^3+z^2+z+1)^2}{iz^5}$ possède un pôle d'ordre 5 en $z = 0$. La formule des résidus conduit à $\int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz = 2i\pi Res(g,0)$. On a $Res(g,0) = \dfrac{1}{4!} \lim_{z\to 0} \dfrac{d^4}{dz^4}(z^4+z^3+z^2+z+1)^2 = 5$. Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(5\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} d\theta = 2i\pi Res(g,0) = 10\pi$.

Exercice 4
Il s'agit de trouver la série de Laurent de f en précisant la nature de la singularité, la valeur du résidu, et le domaine de convergence.

1. $f(z) = \dfrac{z^2+2z+1}{z+1}$ en $z_0 = -1$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^3}$ en $z_0 = 1$.
3. $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2-1}$ en $z_0 = 1$.

Solution 4
1. $f(z) = \dfrac{z^2+2z+1}{z+1} = \dfrac{(z+1)^2}{z+1} = z+1$. Donc, contrairement aux apparences, $z_0 = -1$ est une fausse singularité. Donc $Res(f,-1) = 0$, le développement en série de Laurent est trivialement $z+1$, et la convergence a lieu pour tout z.
2. $z_0 = 1$ est un pôle d'ordre 3 de f, $Res(f,0) = 0$ puisque, bien sûr, $\dfrac{-1}{(z-1)^3}$ est la série de Laurent de f en 1. La convergence a lieu sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
3. $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2-1} = 1 - \dfrac{1}{2(z+1)} + \dfrac{3}{2(z-1)}$. La seule autre singularité de f est en -1. 1 est un pôle simple. Calculons le développement de $\frac{1}{z+1}$. On a $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{(z-1)}{2}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\dfrac{z-1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$ pour tout $0 < |z-1| < 2$ (série géométrique en $q = -(z-1)/2$ et donc $|q| < 1$ si, et seulement si, $|z-1| < 2$). On obtient ainsi $f(z) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{z-1} + 1 - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{z-1} + \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-1)^n$. Il en résulte que $Res(f,1) = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 5
Calculer $\int_\Gamma f \cdot d\ell$ quand

1. $\Gamma = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 1,\ z = 0 \,\}$ et $f(x,y,z) = (x,z,y)$,
2. $\Gamma = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = e^x,\ z = x,\ x \in [0,1] \,\}$ et $f(x,y,z) = (x,y,z)$.

Solution 5

1. On choisit la paramétrisation $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, et donc $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. Il en résulte que $\int_\Gamma f \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} (\cos t, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t \, dt = 0$ ($t \mapsto \cos t \sin t$ est impaire et 2π-périodique).
2. On pose $\gamma(t) = (t, e^t, t)$, $t \in [0, 1]$. Donc $\gamma'(t) = (1, e^t, 1)$ et $\int_\Gamma f \cdot d\ell = \int_0^1 (t, e^t, t) \cdot (1, e^t, 1) dt = \int_0^1 (2t + e^{2t}) dt = [t^2 + \frac{1}{2} e^{2t}]_0^1 = \frac{1+e^2}{2}$.

Exercice 6

Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$\tau y'(t) + y(t) = Ke(t)$$

pour $t \in [0; +\infty[$, où $\tau > 0$ et K sont des constantes et $e(t)$ est une fonction de valeur constante e_0 pour $t \geq 0$, et qui vaut zéro pour $t < 0$. Supposons que $y(0) = y_0$, et qu'enfin la fonction y admette une transformée de Laplace.

1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (on notera $Y(z)$ la transformée de Laplace de y).
2. Résoudre l'équation différentielle en inversant la transformée de Laplace Y.

Solution 6

1. L'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle nous donne
$$\tau z Y(z) - \tau y_0 + Y(z) = \frac{Ke_0}{z}.$$
2. La solution de l'équation précédente est donc $Y(z) = \dfrac{Ke_0}{(\tau z + 1) z} + \dfrac{\tau y_0}{\tau z + 1}$. Posons $h(t) = \frac{1}{\tau} f(\frac{t}{\tau})$ où $f(t) = e^{-t} \mathcal{U}(t)$. Alors $\mathcal{L}(h)(z) = \frac{1}{\tau} \tau \mathcal{L}(f)(\tau z) = \dfrac{1}{\tau z + 1}$ (d'après les règles d'amortissement et de changement d'échelle). Il en résulte, par la règle d'intégration, que $\dfrac{1}{(\tau z + 1) z}$ est la transformée de Laplace de $\int_0^t h(s) ds = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{s}{\tau}} \mathcal{U}(\frac{s}{\tau}) ds = \frac{1}{\tau} [-\tau e^{-\frac{s}{\tau}}]_0^t = 1 - e^{\frac{t}{\tau}}$. Donc $y(t) = (Ke_0(1 - e^{\frac{t}{\tau}}) + y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}) \mathcal{U}(t)$.

Exercice 7

En utilisant la transformée de Fourier, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + x^2} dx = 0$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

(Indication : utiliser le formule d'inversion de Fourier.)

Solution 7

On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x + i \sin x}{1 + x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{ix}}{1 + x^2} dx$. Or $\dfrac{1}{1 + x^2}$ est la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$. La formule d'inversion de Fourier donne donc $\dfrac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{ixt}}{1 + x^2} dx$. En particulier, pour $t = 1$, on a $e^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{ix}}{1 + x^2} dx$.