# Examen

Durée 2 heures

**Seuls les documents de cours sont autorisés. Les sujets de TD, et leurs corrigés, ne sont pas autorisés, tout comme ne l'est pas l'utilisation des calculettes, des calculatrices scientifiques, des ordinateurs et des téléphones portables. Le niveau de rigueur attendu est identique à celui des corrections des TD et des preuves vues en cours.**

Le sujet comporte 7 exercices (tournez bien les pages !). Chacun d'eux est noté sur 3 points [1]. Vous composerez sur le sujet, sous chaque exercice, dans les portions laissées libres.

**Veuillez indiquer vos nom et prénom, ainsi que votre brigade, ci-dessous.**

---

**NOM**

**Prénom**

**Brigade**

---

1. Ce barême est susceptible de modifications "à la marge", et la note maximale ne peut excéder vingt sur vingt.

**Exercice 1**

1. La fonction $f(z) = \Re(z)$ est-elle holomorphe ? Justifier votre réponse.
2. Soit la fonction $f(z) = \log(1 + z^2)$, où $\log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme complexe. Trouver le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ dans lequel $f$ est holomorphe.
3. Trouver une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la partie réelle est $P(z) = e^{\Re(z)^2 - \Im(z)^2} \cos(2\Re(z)\Im(z))$.

**Exercice 2**

1. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2+2z+\sin(z+1)}{(z-2)^2}dz$ où $\gamma$ parcourt $\{\, z \in \mathbb{C} \colon |z-2| = 1 \,\}$ une fois dans le sens direct.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_j} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$, $j = 1, 2$, où
   (a) $\gamma_1$ est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, dans le sens direct.
   (b) $\gamma_2$ est le bord du rectangle $[-1, 0] \times [-1/2, 1/2]$, dans le sens direct.
3. Supposons que $\gamma$ désigne un cercle parcouru une fois dans le sens direct. Discuter, en fonction de $\gamma$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$.

**Exercice 3**

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(5\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} d\theta$. (Indication : exprimer $\displaystyle\frac{\sin^2(5\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$ comme une fraction rationnelle $f(z)$ en la variable $z = e^{i\theta}$, puis considérer l'intégrale à calculer comme une intégrale curviligne de $\frac{f(z)}{z}$.)

**Exercice 4**

Il s'agit de trouver la série de Laurent de $f$ en précisant la nature de la singularité, la valeur du résidu, et le domaine de convergence.

1. $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 1}{z + 1}$ en $z_0 = -1$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{(1 - z)^3}$ en $z_0 = 1$.
3. $f(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^2 - 1}$ en $z_0 = 1$.

**Exercice 5**

Calculer $\int_\Gamma f \cdot d\ell$ quand

1. $\Gamma = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = 0 \,\}$ et $f(x, y, z) = (x, z, y)$,
2. $\Gamma = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = e^x,\ z = x,\ x \in [0, 1] \,\}$ et $f(x, y, z) = (x, y, z)$.

**Exercice 6**
Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$\tau y'(t) + y(t) = Ke(t)$$

pour $t \in [0; +\infty[$, où $\tau > 0$ et $K$ sont des constantes et $e(t)$ est une fonction de valeur constante $e_0$ pour $t \geq 0$, et qui vaut zéro pour $t < 0$. Supposons que $y(0) = y_0$, et qu'enfin la fonction $y$ admette une transformée de Laplace.

1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (on notera $Y(z)$ la transformée de Laplace de $y$).
2. Résoudre l'équation différentielle en inversant la transformée de Laplace $Y$.

**Exercice 7**
En utilisant la transformée de Fourier, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

(Indication : utiliser le formule d'inversion de Fourier.)