Examen (Corrigé)

Durée 2 heures

Seuls les documents de cours sont autorisés. Les sujets de TD, et leurs corrigés, ne sont pas autorisés, tout comme ne le sont pas les calculettes, les calculatrices scientifiques, les ordinateurs et les téléphones portables. Le niveau de rigueur attendu est identique à celui des corrections des TD et des preuves vues en cours.

NOM

Prénom

Brigade

Exercice 1

1. Soit la fonction f définie par $f(z) = \Re(z)^2 + 2i\Re(z)\Im(z) - \Im(z)^2 - 3\Re(z) - 3i\Im(z) + 4$. Montrer que f est une fonction entière.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes g pour lesquelles $\Re(g(z)) = x^2 - y^2 - 3x + 4$ et $g(x) = x^2 - 3x + 4$ ($x \in \mathbb{R}$).

Solution 1

1. Il suffit de montrer que f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier. Il est clair que f est différentiable (comme polynôme en deux variables réelles $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$) sur $\mathbb{C}$. D'après le Chapitre 1 du cours il suffit donc de montrer que sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. Ce qui est équivalent à l'égalité $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)$ pour tout nombre complexe z. Or il se trouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 2x+2iy-3$ alors que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = 2ix-2y-3i$. L'égalité précédente est donc vérifiée.
2. Posons $P(x+iy) = x^2 - y^2 - 3x + 4$. On a $\Delta P = 0$, donc P est une fonction harmonique. Elle est donc, au moins localement, la partie réelle d'une fonction holomorphe $f = P + iQ$. Les conditions de Cauchy-Riemann conduisent au système suivant
$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y}(z) & = & \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) & = & 2x-3 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) & = & -\dfrac{\partial P}{\partial y} & = & 2y \end{cases}$$
De la deuxième équation on trouve que $Q(z) = 2yx + \phi(y)$ où ϕ est une fonction dérivable. On a donc (d'après la première équation) $2x - 3 = 2x + \phi'(y)$ de sorte que $\phi'(y) = -3$ soit encore $\phi(y) = -3y + c$, où c est une constante complexe, et donc $Q(z) = 2yx - 3y + c$. On obtient finalement $g(z) = x^2 - y^2 - 3x + 4 + 2ixy - 3iy + ic$. Enfin doit avoir $x^2 - 3x + 4 + ic = g(x + i0) = x^2 - 3x + 4$. Donc $c = 0$, et il n'y a qu'une seule solution à savoir $f(z) = x^2 - y^2 - 3x + 4 + 2ixy - 3iy$.

Exercice 2

Soit la fonction $f(z) = \exp(\frac{1}{n}\log z)$ où $n \geq 1$ et log désigne la détermination principale du logarithme complexe.

1. Montrer que f est holomorphe (préciser son domaine d'holomorphie).
2. Déterminer de deux façons (un peu) différentes la dérivée de f (exprimée comme fonction de f).
3. Déterminer le développement en série entière de $f(z) = \frac{1}{z^2}$ au voisinage de $a \neq 0$.

Solution 2

1. log est holomorphe dans le plan fendu P, alors que exp est entière, donc d'après la composition des fonctions holomorphes, f est holomorphe dans P également.
2. (a) On a vu en cours que $\exp(nz) = \exp(z)\cdots\exp(z) = \exp(z)^n$ pour tout nombre naturel non nul n. Il en résulte par conséquent que $(f(z))^n = \exp(\log z) = z$ pour tout $z \in P$. Par dérivation, cela donne $nf'(z)(f(z))^{n-1} = 1$ et donc $f'(z) = \frac{1}{n(f(z))^{n-1}}$ (rappelons ici que f ne s'annule jamais car exp ne s'annule jamais).

   (b) De $f(z) = \exp(\frac{1}{n}\log z)$ on en déduit que $f'(z) = \frac{1}{nz}\exp(\frac{1}{n}\log z)$. Or pour tout $z \in P$, $z = \exp(\log z) = \left(\exp(\frac{1}{n}\log z)\right)^n = f(z)^n$. En conséquence de quoi $f'(z) = \frac{1}{n(f(z))^n}f(z) = \frac{1}{n(f(z))^{n-1}}$.
3. On a $f(z) = g'(z)$ pour $g(z) = -\frac{1}{z}$. Pour $a \neq 0$, on a

$$g(z) = -\frac{1}{z} = \frac{1}{-a-z+a} = \frac{1}{-a(1+\frac{z-a}{a})} = \frac{1}{-a(1-\frac{a-z}{a})}.$$

   En supposant que $|a-z| < |a|$, il en résulte que $g(z) = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a-z)^n}{a^n}$. On obtient donc un développement de f en intégrant terme à terme celui de g, soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a-z)^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(a-z)^m}{ma^m}$.

Exercice 3

1. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\sin(2z^2+3z+1)}{z-\pi}dz$$

où γ parcourt une fois dans le sens indirect le cercle de centre π et de rayon 1.

2. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma_i} \frac{e^{-z}\cos(z)}{(z-i)(z^2+1)}dz, i=1,2$$

où

(a) γ_1 parcourt une fois dans le sens direct le cercle de centre i et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

(b) γ_2 parcourt une fois dans le sens direct le carré C dont les côtés sont les segments $[0;\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2};\frac{1}{2}(1+i)]$, $[\frac{i}{2};\frac{1}{2}(1+i)]$, $[0;\frac{i}{2}]$. (Étant donnés deux nombres complexes distincts z_1, z_2, on définit le **segment** $[z_1;z_2]$ par $\{\,(1-t)z_1+tz_2\colon t\in[0,1]\,\}$.)

3. Calculer

$$\int_{\gamma_i} \frac{dz}{z}, i=1,2$$

pour γ_1 parcourant une fois dans le sens direct le cercle de rayon 1 centré en 2, et γ_2 parcourant une fois dans le sens direct le cercle unité.

Solution 3

1. La fonction $g(z)=\sin(2z^2+3z+1)$ est une fonction entière. En appliquant la formule de Cauchy pour un disque, on obtient $g(\pi)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma^{\mathsf{op}}}\frac{\sin(2z^2+3z+1)}{z-\pi}dz$, de sorte que $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(2z^2+3z+1)}{z-\pi}dz=-2i\pi\sin(2\pi^2+3\pi+1)$.

2. On a $f(z)=\dfrac{e^{-z}\cos(z)}{(z-i)^2(z+i)}$.

(a) La fonction $g(z)=\dfrac{e^{-z}\cos(z)}{(z+i)}$ est holomorphe dans le disque centré en i et de rayon $\dfrac{1}{2}$. On a donc $\dfrac{1}{4}e^{-i}(2i(\cos(i)+\sin(i))+\cos(i))=g'(i)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{f(u)}{(u-i)^2}du=\dfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{e^{-z}\cos(z)}{(z-i)(z^2+1)}dz$. Donc (par la seconde formule de Cauchy) $\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{e^{-z}\cos(z)}{(z-i)(z^2+1)}dz=\frac{i\pi e^{-i}}{2}(2i(\cos(i)+\sin(i))+\cos(i))$.

(b) La fonction $f(z)=\dfrac{e^{-z}\cos(z)}{(z-i)(z^2+1)}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{\,\pm i\,\}$ et $\overline{C}\subseteq\mathbb{C}\setminus\{\,\pm i\,\}$. Comme $\overline{C}$ est un compact à bord régulier, et que $\partial\overline{C}$, dans le sens direct, est, par hypothèse, donné par γ_2, la première formule de Cauchy donne

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz=0.$$

3. (a) La fonction $\frac{1}{z}$ admet dans le plan fendu P la fonction holomorphe $\log z$ comme primitive. Or le cercle centré en 2 et de rayon 1 est inclus dans le plan fendu. Donc $\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z}=0$ (puisque γ_1 est un circuit).

(b) Par invariance à la paramétrisation, on peut choisir $\gamma_2(t) = e^{2i\pi t}$, $t \in [0, 1]$. On a donc $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}} 2i\pi dt = 2i\pi$.

Exercice 4
Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

(Rappelons que $\sqrt{3} \approx 1,7305$.)

Solution 4
Soit $R(x,y) = \dfrac{1}{2+x}$. Le dénominateur $2+x$ ne s'annule en aucun point du cercle unité. On peut donc appliquer directement la méthode vue en cours (chapitre 3) : on définit, pour $z \neq 0$, alors $f(z) = \dfrac{1}{iz} R(\dfrac{z+z^{-1}}{2}, \dfrac{z-z^{-1}}{2i}) = \dfrac{1}{iz}\dfrac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}} = \dfrac{1}{iz}\dfrac{1}{\frac{4+z+z^{-1}}{2}} = \dfrac{2}{i}\dfrac{1}{(z^2+4z+1)} = \dfrac{2}{i}\dfrac{1}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}$. Les singularités de f dans $\bar{D}(0;1)$ sont 0 et $-2+\sqrt{3}$. Mais 0 est une fausse singularité (puisque $f(z) = \dfrac{2}{i}\dfrac{1}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}$ et le membre de droite est holomorphe en 0). On a donc au final

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = 2i\pi Res(f, \sqrt{3}-2).$$

Il est clair que $-2+\sqrt{3}$ est un pôle simple. Il en résulte que $Res(f, \sqrt{3}-2) = \lim_{z\to\sqrt{3}-2}(z+2-\sqrt{3})f(z) = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}$. Donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 5

1. Calculer la transformée de Laplace de $t\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$.
2. Déterminer la transformée de Laplace inverse de

$$F(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}.$$

Solution 5

1. Posons $f(t) = \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$. On a $\mathcal{L}(f)(z) = \dfrac{z}{z^2+\omega^2}$. La règle de dérivation de la transformée de Laplace donne alors $\mathcal{L}(tf(t))(z) = -\mathcal{L}(f)(z) = -\dfrac{z^2+\omega^2-2z^2}{(z^2+\omega^2)^2} = \dfrac{z^2-\omega^2}{(z^2+\omega^2)^2}$.

2. Nous avons $F(z) = \dfrac{z^2+1-1}{(z^2+1)^2} = \dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2} + \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$. D'après la première question, $\dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$ est la transformée de Laplace de $t\cos(t)$. Il reste donc à déterminer la transformée de Laplace inverse de $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$. On remarque que la dérivée de $\dfrac{1}{z^2+1}$ est $\dfrac{-2z}{(z^2+1)^2}$. Donc $\dfrac{1}{(z^2+1)^2} = \dfrac{1}{-2z}\mathcal{L}(\sin(t)\mathcal{U}(t))'(z) = \dfrac{1}{2z}\mathcal{L}(t\sin(t)\mathcal{U}(t))(z)$ (par la règle de dérivation de la transformée de Laplace), soit encore $\mathcal{L}(t\sin(t)\mathcal{U}(t))(z) = \dfrac{2z}{(1+z^2)^2}$. Or $t\sin(t)\mathcal{U}(t)$ est la dérivée de la fonction $h(t) = (-t\cos(t)+\sin(t))\mathcal{U}(t)$ qui satisfait $\lim_{t\to0^+} h(t) = 0$. On a donc (par la règle de la transformée de Laplace d'une dérivée) $\mathcal{L}(t\sin(t)\mathcal{U}(t))(z) = \mathcal{L}(h')(z) = z\mathcal{L}(h)(z) - h(0^+) = z\mathcal{L}(h)(z)$. Il en résulte donc que $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ est la transformée de Laplace de $\frac{1}{2}h(t) = (-\frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t))\mathcal{U}(t)$. En conclusion, la transformée de Laplace inverse de F est donc $(t\cos(t) - \frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t))\mathcal{U}(t) = \dfrac{1}{2}\mathcal{U}(t)(t\cos(t)+\sin(t))$.

Exercice 6
Calculer les intégrales
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$
et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$
(Utiliser la formule d'inversion de la transformée de Fourier.)

Solution 6
La fonction $f(x) = e^{-|x|}$ admet $\dfrac{2}{\omega^2+1}$ pour transformée de Fourier. Comme f est de classe C^1 par morceaux et, bien entendu, est absolument intégrable, on peut appliquer la formule d'inversion de la transformée de Fourier, laquelle donne
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega^2+1} e^{i\omega t} d\omega = f(t)$$
(la fonction f est bien sûr continue sur $\mathbb{R}$ tout entier). Remarquons ici que l'intégrale converge au sens des intégrales impropres de Riemann. Cela donne encore
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2+1} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+\omega^2} d\omega + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{1+\omega^2} d\omega.$$
Pour $t = 1$, on a
$$1 = \frac{1}{e} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega)}{1+\omega^2} d\omega + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{1+\omega^2} d\omega.$$
On en déduit donc que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{1+\omega^2} d\omega = 0$$
et que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega)}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{e}.$$

Exercice 7
Déterm**e**r la suite $\mathbf{x}$ dont la transformée en Z est la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z - 10}.$$

Solution 7
Posons $g(z) = z^{n-1}f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{(z-5)(z+2)}$. Cette fonction possède un pôle simple en 0 quand $n = 0$, mais pas pour $n \geq 1$. Ainsi les cas $n = 0$ et $n \geq 1$ doivent être considérés séparément. Pour $n = 0$, $g(z) = \dfrac{1}{z(z-5)(z+2)}$. Puis $Res(g, 0) = \lim_{z\to 0} zg(z) = -\dfrac{1}{10}$, $Res(g, 5) = \lim_{z\to 5}(z-5)g(z) = \dfrac{1}{35}$ et $Res(g, -2) = \lim_{z\to -2}(z+2)g(z) = \dfrac{1}{14}$. Donc $x_0 = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{35} + \dfrac{1}{14} = 0$. Pour $n \geq 1$, $g(z)$ n'admet que deux pôles simples en 5 et en -2. On a $Res(g, 5) = \lim_{z\to 5}(z-5)g(z) = \dfrac{5^{n-1}}{7}$ et $Res(g, -2) = \lim_{z\to -2}(z+2)g(z) = \dfrac{(-2)^{n-1}}{-7}$. Donc $x_n = \dfrac{1}{7}(5^{n-1} - (-2)^{n-1})$ pour $n \geq 1$.