Examen

Durée 2 heures

Seuls les documents de cours sont autorisés. Les sujets de TD, et leurs corrigés, ne sont pas autorisés, tout comme ne l'est pas l'utilisation des calculettes, des calculatrices scientifiques, des ordinateurs et des téléphones portables. Le niveau de rigueur attendu est identique à celui des corrections des TD et des preuves vues en cours.

Le sujet comporte 7 exercices (tournez bien les pages !). Chacun d'eux est noté sur 3 points, à une exception, l'un des exercices n'étant noté que sur 2 points [1]. Vous composerez sur le sujet, sous chaque exercice, dans les portions laissées libres.

Veuillez indiquer vos nom et prénom, ainsi que votre brigade, ci-dessous.

NOM

Prénom

Brigade

---

1. Ce barême est susceptible de modifications "à la marge".

Exercice 1

1. Soit la fonction f définie par $f(z) = \Re(z)^2 + 2i\Re(z)\Im(z) - \Im(z)^2 - 3\Re(z) - 3i\Im(z) + 4$. Montrer que f est une fonction entière.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes g pour lesquelles $\Re(g(z)) = x^2 - y^2 - 3x + 4$ et $g(x) = x^2 - 3x + 4$ $(x \in \mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit la fonction $f(z) = \exp(\frac{1}{n} \log z)$ où $n \geq 1$ et log désigne la détermination principale du logarithme complexe.

1. Montrer que f est holomorphe (préciser son domaine d'holomorphie).
2. Déterminer de deux façons (un peu) différentes la dérivée de f (exprimée comme fonction de f).
3. Déterminer le développement en série entière de $f(z) = \frac{1}{z^2}$ au voisinage de $a \neq 0$.

Exercice 3

1. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\sin(2z^2+3z+1)}{z-\pi}dz$$

où γ parcourt une fois dans le sens indirect le cercle de centre π et de rayon 1.

2. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma_i} \frac{e^{-z}\cos(z)}{(z-i)(z^2+1)}dz, i=1,2$$

où

(a) γ_1 parcourt une fois dans le sens direct le cercle de centre i et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

(b) γ_2 parcourt une fois dans le sens direct le carré C dont les côtés sont les segments $[0;\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2};\frac{1}{2}(1+i)]$, $[\frac{i}{2};\frac{1}{2}(1+i)]$, $[0;\frac{i}{2}]$. (Étant donnés deux nombres complexes distincts z_1, z_2, on définit le **segment** $[z_1;z_2]$ par $\{\,(1-t)z_1+tz_2\colon t\in[0,1]\,\}$.)

3. Calculer

$$\int_{\gamma_i} \frac{dz}{z}, i=1,2$$

pour γ_1 parcourant une fois dans le sens direct le cercle de rayon 1 centré en 2, et γ_2 parcourant une fois dans le sens direct le cercle unité.

Exercice 4
Calculer
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$
(Rappelons que $\sqrt{3} \approx 1,7305$.)

Exercice 5

1. Calculer la transformée de Laplace de $t\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$.
2. Déterminer la transformée de Laplace inverse de

$$F(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}.$$

Exercice 6
Calculer les intégrales
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$
et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$
(Utiliser la formule d'inversion de la transformée de Fourier.)

Exercice 7
Déterminer la suite $\mathbf{x}$ dont la transformée en Z est la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z - 10}.$$