Outils Mathématiques - Chapitre IX : Transformée en Z

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

Plan du cours

Table des matières

Échantillonnage

En traitement du signal il arrive souvent de ne devoir considérer que certaines valeurs d'un signal temporel, par exemple à nT, $n = 0, 1, 2 \cdots$, où T est un nombre positif fixé, appelé période d'échantillonnage.

Autrement dit, en partant d'un signal continu $f(t)$, on considère un signal discret $(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$.

La transformée en Z permet d'associer une fonction d'une variable complexe à ce type de signal discret, et d'employer certaines techniques de l'analyse complexe pour étudier des propriétés du signal.

La transformée en Z est également employée en filtrage numérique ainsi que pour la résolution d'équations récurrentes.

Rappel : Séries entières

• Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{N}$ pour chaque n, est $R = \dfrac{1}{\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ où, par convention, on admet que $R = +\infty$ si $\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$.

• Pour tout $z \in D(0; R)$, le disque de convergence, la série de terme général $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente, et la somme de la série définit une fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ holomorphe dans $D(0; R)$.

• On en déduit immédiatement que la série de Laurent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| > \dfrac{1}{R}$ et la fonction d'une variable complexe $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ est holomorphe pour tout $|z| > \dfrac{1}{R}$.

La transformée en Z

Définition

Soit $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

La transformée en Z de $\mathbf{x}$ est la série de Laurent

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}$$

qui est une fonction holomorphe dans $\{\, z \in \mathbb{C} \colon |z| > \frac{1}{R} \,\}$ où R est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$.

L'application qui associe la série de Laurent $\mathcal{Z}(\mathbf{x})$ à la suite numérique $\mathbf{x}$ est appelée la transformation en Z.

On dira que R est le rayon de convergence de $\mathcal{Z}(\mathbf{x})$.

Notations

• Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Alors on notera parfois par $S(z^{-1})$ la série de Laurent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ (notons encore une fois que $S(z^{-1})$ est absolument convergente pour tout $|z| > \frac{1}{R}$).

• Soit α une lettre quelconque. Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, alors on désignera par $\boldsymbol{\alpha}$ cette suite. Autrement dit, on utilisera une même lettre pour nommer une suite et ses valeurs (en **gras** pour le nom de la suite, et normale pour ses valeurs). Enfin, R_α désignera alors le rayon de convergence de la série entière de terme général $\alpha_n z^n$ (et donc aussi, par convention, de $\mathcal{Z}(\boldsymbol{\alpha})$).

Exemple : Signal identique

Considérons $i_n = n$ pour chaque entier naturel n.

Considérons la série entière $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$. Elle est obtenue comme la dérivée (terme à terme) de la série $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ dont le rayon de convergence est 1. Il en résulte que le rayon de convergence de $S(z)$ est 1 également et $S(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$.

De plus, $\frac{z}{(1-z)^2} = zS(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ pour tout $|z| < 1$. On en déduit que le rayon de convergence de $\mathcal{Z}(\mathbf{i})$ est 1 car $\mathcal{Z}(\mathbf{i}) = z^{-1}S(z^{-1})$.

Par ailleurs pour tout $|z| > 1$, $\mathcal{Z}(\mathbf{i}) = \frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Exemple : Signal échelon unité discret

Soit $u_n = 1$ pour tout entier naturel n.

On a vu en cours que le rayon de convergence de la série entière géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ est 1, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ pour tout $|z| < 1$.

Il en résulte immédiatement que $\mathcal{Z}(\mathbf{u}) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$ pour tout $|z| > 1$.

Exemple : Signal géométrique

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On considère la suite $g_n = \alpha^n$.

Puisque $\dfrac{|g_{n+1}z^{n+1}|}{|g_n z^n|} = |\alpha||z|$, il résulte de la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la série (entière) de terme général $g_n z^n$ est $\frac{1}{|\alpha|}$ (pour $|z| = \frac{1}{\alpha}$, la suite $g_n z^n$ ne tend pas vers 0). De plus pour tout $|z| < \frac{1}{|\alpha|}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z)^n = \frac{1}{1-\alpha z}$.

Il en résulte que $\mathcal{Z}(\mathbf{g}) = \dfrac{1}{1-\frac{\alpha}{z}} = \dfrac{z}{z-\alpha}$ pour tout $|z| > |\alpha|$.

Remarque

Le signal échelon unité discret $\mathbf{u}$ est égal à $\mathbf{g}$ lorsque $\alpha = 1$.

Table des matières

Espace vectoriel des suites numériques

Il est clair que l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les opérations suivantes (opérations terme à terme héritées de la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$) :

1. Addition : $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ est la suite de terme général u_n+v_n,
2. Inversion : $-\mathbf{u}$ est la suite de terme général $-u_n$,
3. Élément neutre : $\mathbf{0}$ est la suite constante de valeur 0,
4. Multiplication par un scalaire : $\alpha\mathbf{u}$ est la suite de terme général αu_n.

Linéarité

Proposition

Soient α, β deux nombres complexes et $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ deux suites de nombres complexes.

Alors
$$\mathcal{Z}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{Z}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{Z}(\mathbf{y})$$
sur $\{\, z \colon |z| > \max\{ \frac{1}{R_x}, \frac{1}{R_y} \} \,\}$.

Signal retardé

Proposition

Soient $\mathbf{x}$ une suite numérique, $k \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y}$ la suite de terme général
$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n, \\ x_{n-k} & \text{sinon} \end{cases}$ que l'on appelle le signal $\mathbf{x}$ retardé de k.

Alors $\mathcal{Z}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{y})$ ont même rayon de convergence et, dans leur domaine d'holomorphie,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = z^{-k}\mathcal{Z}(\mathbf{x}).$$

Bien sûr si $k = 0$, le signal $\mathbf{x}$ retardé de k est $\mathbf{x}$ lui-même.

Preuve

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y_n z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} x_{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{n+k} = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n.$ $\square$

Signal avancé

Proposition

Soient $\mathbf{x}$ une suite numérique, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{y}$ la suite définie par $y_n = x_{n+k}$.

Alors $\mathcal{Z}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{y})$ ont même rayon de convergence et, dans leur domaine d'holomorphie,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = z^k \left(\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} \right).$$

Preuve (esquisse)

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+k} z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} x_n z^{n-k} = z^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} x_n z^n =$
$\displaystyle z^{-k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^n\right).$ $\square$

Cas particulier où $k = 1$

Pour $k = 1$, on a $y_n = x_{n+1}$ de sorte que d'après la proposition précédente

$$\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = z(\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - x_0).$$

Si de plus $x_0 = 0$, alors

$$\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = z\mathcal{Z}(\mathbf{x}).$$

Exemple

Si $y_n = n + 1$, on a $\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$ pour tout $|z| > 1$ (puisque $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ pour tout $|z| < 1$, d'après un exemple vu précédemment). De plus, d'après la proposition précédente, $\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = z\mathcal{Z}(\mathbf{x})$ où $x_n = n$ pour tout n, de sorte que $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ pour tout $|z| > 1$.

Produit (terme à terme) par un signal géométrique

Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ une série de Laurent. On note $S(\frac{z}{\alpha})$ la série de Laurent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\frac{z}{\alpha})^{-n}$.

Proposition

Soient $\mathbf{x}$ une suite numérique, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\mathbf{y}$ la suite définie par $y_n = \alpha^n x_n$.

Alors pour tout $|z| > \frac{|\alpha|}{R_x}$,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})(\frac{z}{\alpha}).$$

Exemple

Considérons $y_n = \alpha^n u_n$ où $u_n = 1$ pour tout entier naturel n.

On rappelle que $\mathcal{Z}(\mathbf{u}) = \dfrac{z}{z-1}$ pour tout $|z| > 1$.

Alors $\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \mathcal{Z}(\mathbf{u})(\frac{z}{\alpha}) = \dfrac{\frac{z}{\alpha}}{\frac{z}{\alpha} - 1} = \dfrac{z}{z-\alpha}$ pour tout $|z| > |\alpha|$.

Dérivation par rapport à z

Proposition

Soit $\mathbf{x}$ une suite numérique. On définit la suite $\mathbf{y}$ par $y_n = nx_n$.

Alors $\mathcal{Z}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{y})$ ont le même rayon de convergence, et

$$\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}(\mathbf{x}).$$

Preuve

On utilise la propriété de dérivation sous le signe somme dans une série entière à l'intérieur de son disque de convergence.

Soit donc $|z| > \dfrac{1}{R_x}$. On a $\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \sum_{n\geq 0} n x_n z^{-n} = -z \sum_{n\geq 0} x_n(-nz^{-n-1}) = -z \sum_{n\geq 0} x_n \dfrac{d}{dz} z^{-n} = -z \dfrac{d}{dz} \sum_{n\geq 0} x_n z^{-n} = -z \dfrac{d}{dz} \mathcal{Z}(\mathbf{x})$. $\square$

Exemples

1. Soit $i_n = nu_n$ (où $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour tout $|z| > 1$, on a $\mathcal{Z}(\mathbf{i}) = -z\dfrac{d}{dz}\mathcal{Z}(\mathbf{u}) = -z\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ (comme nous l'avions déjà trouvé).

2. Soit $c_n = n^2 u_n$. Alors $c_n = ni_n$. Et donc pour tout $|z| > 1$,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{c}) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Produit de convolution

Définition

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux suites numériques.

On peut considérer la suite $\mathbf{x} * \mathbf{y}$, appelée produit de convolution de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, de terme général

$$\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Exemple

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On définit $\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si k=n,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Soit $(x_n)_n$ une suite numérique. Alors $\delta_k * \mathbf{x}$ est le signal $\mathbf{x}$ retardé de k. En effet $(\delta_k * \mathbf{x})(n) = \sum_{i=0}^{n} \delta_k(i) x_{n-i} = \begin{cases} x_{n-k} & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On en déduit donc (par la propriété du signal retardé)

$$\mathcal{Z}(\delta_k * \mathbf{x}) = z^{-k} \mathcal{Z}(\mathbf{x})$$

pour tout $|z| > \frac{1}{R_x}$.

Transformée en Z du produit de convolution

Proposition (admise)

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux suites numériques.

Alors quel que soit $|z| > \max\{\frac{1}{R_x}, \frac{1}{R_y}\}$,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})\mathcal{Z}(\mathbf{y}).$$

Exemple

Calculons à nouveau $\mathcal{Z}(\delta_k * \mathbf{x})$ en utilisant la propriété précédente :

$\mathcal{Z}(\delta_k * \mathbf{x}) = \mathcal{Z}(\delta_k)\mathcal{Z}(\mathbf{x})$ pour tout $|z| > \max\{\frac{1}{R_x}, \frac{1}{R_{\delta_k}}\}$.

Or $\mathcal{Z}(\delta_k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_k(n) z^{-n} = z^{-k}$ avec $R_{\delta_k} = +\infty$.

Par suite pour tout $|z| > \frac{1}{R_x}$, $\mathcal{Z}(\delta_k * \mathbf{x}) = z^{-k}\mathcal{Z}(\mathbf{x})$.

Table des matières

Problème de l'inversion

Étant donnée une fonction holomorphe f, développable en série de Laurent en $z = 0$ sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n} = \mathcal{Z}(\mathsf{x})$$

(donc la partie régulière est nulle) pour $|z| > r$.

L'objectif est ici de retrouver la suite numérique x à partir de $f(z)$ (et non, bien entendu, à partir de son développement).

D'après le chapitre du cours "Résidus et applications", on sait que

$$x_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) z^{n-1} dz$$

pour tout circuit simple γ, orienté dans le sens direct, tracé dans $\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| > r \}$.

(Rappelons qu'un circuit simple $\gamma \colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ est un circuit, donc $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, tel que $\gamma_{|_{[t_0, t_1[}}$ est injectif.)

Injectivité de la transformée en Z

Par l'unicité du développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe, on en déduit immédiatement que la transformation en Z est injective.

Calcul d'une transformée en Z inverse par les résidus

Proposition

Soit $f(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})$ pour une suite numérique $\mathbf{x}$, holomorphe pour $|z| > r$.

Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \sum_u Res(f(z)z^{n-1}, u)$$

où γ désigne un circuit simple, orienté dans le sens direct, tracé dans $\{ z : |z| > r \}$, $int\gamma$ est l'intérieur de γ, et la somme porte sur toutes les singularités isolées u de $f(z)z^{n-1}$ qui sont dans $int\gamma$.

Remarque

Pour $n \geq 1$, les singularités isolées de $f(z)$ et de $f(z)z^{n-1}$ sont identiques. Si $n = 0$, $f(z)z^{-1}$ a les mêmes pôles que $f(z)$ plus, éventuellement, un pôle en 0 (d'ordre 1 si 0 n'est pas déjà un pôle de f).

Preuve

Il suffit d'appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z)z^{n-1}$ et au compact à bord régulier $K = \overline{int\gamma}$ de sorte que ∂K soit γ :

$$2i\pi x_n = \int_\gamma f(z)z^{n-1}dz = 2i\pi \sum_u Res(f(z)z^{n-1}, u).$$

$\square$

Exemple

Soit $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

La fonction rationnelle f possède un pôle simple en 0, et est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$.

On a donc $x_n = Res(z^{n-1}f(z), 0) = \lim_{z\to 0} zz^{n-1}f(z) = 0$ pour tout $n > 1$, $x_1 = Res(f(z), 0) = 1$ ($\frac{1}{z}$ est bien sûr le développement en série de Laurent de f en 0 et le coefficient de z^{-1}, le résidus de f en 0, est 1), et $x_0 = Res(\frac{1}{z^2}, 0) = \dfrac{d}{dz}(z^2\frac{1}{z^2})_{z=0} = 0$.

Il en résulte que $\mathbf{x} = \delta_1$.

On vérifie que l'on a $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \mathcal{Z}(\delta_1) = \frac{1}{z} = f(z)$ pour tout $|z| > 0$.

Exemple

Soit $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ avec $z_0 \neq 0$.

La fonction rationnelle f possède un pôle simple en z_0, et est holomorphe dans $\{ z : |z| > |z_0| \}$.

On a donc $x_n = Res(z^{n-1}f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)z^{n-1}f(z) = z_0^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, et $x_0 = Res(z^{-1}f(z), z_0) + Res(z^{-1}f(z), 0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)z^{-1}f(z) + \lim_{z\to 0} zz^{-1}f(z) = \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_0} = 0$.

Il s'ensuit que $\mathbf{x}$ est obtenu comme le signal $z_0^n u_n$ retardé de 1, soit $x_0 = 0$, $x_{n+1} = z_0^n$.

On peut vérifier que $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = z^{-1}\mathcal{Z}(\mathbf{u})(\frac{z}{z_0})$ (puisque $(z_0^n)_n$ correspond au signal $(z_0^n u_n)_n$) $= z^{-1}\dfrac{z}{z - z_0} = \dfrac{1}{z - z_0}$ pour tout $|z| > |z_0|$.

Remarque : Noter bien la prise en compte du pôle en 0 de $\frac{f(z)}{z}$ pour déterminer x_0.

Exemple

Soit $f(z) = \dfrac{z}{z - z_0}$, $z_0 \neq 0$.

La fonction rationnelle f possède un pôle simple en z_0, et est holomorphe dans $\{ z \colon |z| > |z_0| \}$.

On a donc $x_n = Res(z^{n-1}f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)z^{n-1}f(z) = z_0^n$ pour tout $n \geq 1$, et $x_0 = Res(z^{-1}f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)z^{-1}f(z) = 1$ (0 n'est pas un pôle de $z^{-1}f(z)$ mais seulement une fausse singularité). Donc $x_n = z_0^n$ pour tout n, de sorte que $\mathbf{x}$ correspond à $(z_0^n u_n)_n$.

Vérification : $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \mathcal{Z}(\mathbf{u})(\frac{z}{z_0}) = \dfrac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \dfrac{z}{z - z_0}$ pour tout $|z| > |z_0|$.

Fonctions rationnelles

Corollaire (admis)

Soit une fonction rationnelle $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ avec $\deg P \leq \deg Q$.

Alors f est la transformée en Z d'une suite numérique $\mathbf{x}$, définie et holomorphe dans

$$\{\, z\colon |z| > \max\{\, |u|\colon u \text{ est un pôle de } f \,\}\,\}.$$

Remarque

Par injectivité de la transformée en Z, la suite numérique $\mathbf{x}$ du corollaire ci-dessus telle que $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = f$ est bien sûr unique.

Exemple

Soit $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$.

D'après le corollaire précédent, f est la transformée en Z d'une suite numérique $\mathbf{x}$ que l'on se propose de déterminer.

On a $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$. Donc f admet deux pôles simples, et est holomorphe dans $\{ z \colon |z| > 2 \}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z)z^{n-1} = \dfrac{z^{n+1}}{(z-1)(z-2)}$ admet 1 et 2 comme pôles simples.

Donc $x_n = Res(f(z)z^{n-1}, 1) + Res(f(z)z^{n-1}, 2) =$
$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)z^{n-1} + \lim_{z\to 2}(z-2)f(z)z^{n-1} = -1 + 2^{n+1}$.

Remarque

Pour déterminer la suite numérique qui correspond, par la transformée en Z, à une fonction rationnelle $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ avec $\deg P \leq \deg Q$, il n'est pas toujours judicieux d'utiliser la méthode des résidus.

On peut parfois procéder par identification (autrement dit, on tente de reconnaître une transformée en Z d'une suite déjà calculée, éventuellement à laquelle on aurait appliqué une propriété vue en cours). Par exemple, $\dfrac{z}{z - z_0}$, pour z_0 non nul, est la transformée en Z de $x_n = z_0^n u_n$ (vu en exemple avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ au lieu de z_0).

On peut également utiliser la décomposition en éléments simples, puis procéder par identification.

Exemple : Décomposition en éléments simples

Soit $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$.

Sa décomposition en éléments simples donne

$$f(z) = 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{4}{z-2}.$$

Or 1 est la transformée en Z de δ_0, $-\dfrac{1}{z-1}$ est la transformée en z du signal $-\mathbf{u}$ retardé de 1 (voir l'exemple $\dfrac{1}{1-z_0}$), et $\dfrac{4}{z-2}$ est le signal $y_n = 4 \times 2^n u_n = 2^{n+2} u_n$ retardé de 1.

On en déduit donc que $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = -u_n - 1 + 2^{n+1} u_n = -1 + 2^{n+1}$.

Table des matières

Formulaire des transformées en Z usuelles

x_n	$\mathcal{Z}(x)$	Domaine de convergence
$i_n = n$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\| > 1$
$u_n = 1$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$\alpha^n \ (\alpha \in \mathbb{C}^*)$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$	z^{-k}	$\|z\| > 0$
$e^{-an} \ (a \in \mathbb{C})$	$\dfrac{z}{z-e^{-a}}$	$\|z\| > \|e^{-a}\|$
$ne^{-an} \ (a \in \mathbb{C})$	$\dfrac{ze^{-a}}{z-e^{-a}}$	$\|z\| > \|e^{-a}\|$
$e^{-i\omega n} \ (\omega \in \mathbb{R})$	$\dfrac{z}{z-e^{-i\omega}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega n) \ (\omega \in \mathbb{R})$	$\dfrac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\|z\| > 1$
$\cos(\omega n) \ (\omega \in \mathbb{R})$	$\dfrac{z^2 - z\cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\|z\| > 1$
$\dfrac{a^n}{n!} \ (a \in \mathbb{C})$	$e^{\frac{a}{z}}$	$\|z\| > 0$

Propriétés de la transformation en Z

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ deux suites numériques.

Propriété	Suite	Transformée en Z
Linéarité	$x_n + \alpha y_n \ \alpha \in \mathbb{C}$	$\mathcal{Z}(\mathbf{x}) + \alpha \mathcal{Z}(\mathbf{y})$
Retard	$\begin{cases} 0 & \text{si } k > n, \\ x_{n-k} & \text{sinon} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$	$z^{-k} \mathcal{Z}(\mathbf{x})$
Avance	$x_{n+k} \ (k \in \mathbb{N}^*)$	$z^k \left(\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} \right)$
Produit par un signal géométrique	$\alpha^n x_n \ (\alpha \in \mathbb{C}^*)$	$\mathcal{Z}(\mathbf{x})(\frac{z}{\alpha})$
Dérivation	$n x_n$	$-z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}(\mathbf{x})$
Produit de convolution	$\mathbf{x} * \mathbf{y}$	$\mathcal{Z}(\mathbf{x}) \mathcal{Z}(\mathbf{y})$