Transformée en Z

Exercice 1
Résoudre, en utilisant la transformée en Z, l'équation récurrente

$$x_{n+1} = x_n + 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec la condition initiale $x_0 = 3$.

Solution 1
En appliquant la transformée en Z sur les deux membres de l'équation on obtient $z(\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - 3) = \mathcal{Z}(\mathbf{x}) + \dfrac{2z}{z-1}$ ce qui est équivalent à $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{3z}{z-1} + \dfrac{2z}{(z-1)^2}$. Pour conclure, il y a deux solutions possibles : soit par la méthode des résidus, soit par identification avec les transformées en Z connues. Commençons par cette seconde méthode. Bien sûr $\dfrac{3z}{z-1}$ est la transformée en Z de $3\mathbf{u}$. Et $\dfrac{2z}{(z-1)^2}$ est celle de $2\mathbf{i}$ où $i_n = n$ (vu en cours). Ainsi $x_n = 2n + 3$.

Maintenant, employons la méthode des résidus. Pour tout n, $\mathcal{Z}(\mathbf{x})z^{n-1} = (\frac{3z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2})z^{n-1} = \frac{z(3z-1)}{(z-1)^2}z^{n-1}$ admet un seul pôle double en $z = 1$. On a donc $x_n = Res(\mathcal{Z}(\mathbf{x})z^{n-1}, 1) = \frac{d}{dz}(z^n(3z-1))_{|z=1} = (nz^{n-1}(3z-1) + z^n 3)_{|z=1} = n(3-1) + 3 = 2n + 3$.

Exercice 2
Résoudre, en utilisant la transformée en Z, l'équation récurrente

$$x_{n+1} - 2x_n = 2n$$

avec $x_0 = 1$.

Solution 2
En appliquant la transformée en Z sur les deux membres de l'équation on obtient $z(\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - 1) - 2\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{2z}{(z-1)^2}$. Donc $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{2z}{(z-2)(z-1)^2} + \dfrac{z}{z-2}$. Décomposons $\dfrac{2}{(z-2)(z-1)^2}$ en éléments simples. On obtient $\dfrac{2}{(z-2)(z-1)^2} = -\dfrac{2}{z-1} - \dfrac{2}{(z-1)^2} + \dfrac{2}{z-2}$. Ainsi

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = -\frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{3z}{z-2}.$$

Donc, par identification, on obtient $x_n = -2 - 2n + 3 \times 2^n$ (on sait, par le cours, que la transformée en Z de $y_n = \alpha^n$ est $\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \dfrac{z}{z-\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et c'est ce que nous appliquons à $\dfrac{3z}{z-2}$).

Exercice 3
Résoudre, en utilisant la transformée en Z, l'équation récurrente d'ordre 2

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = \delta_0(n)$$

pour tout entier naturel n, avec, bien sûr, $x_{-1} = x_{-2} = 0$.

Solution 3
On applique la transformée en Z pour obtenir

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - 3z^{-1}\mathcal{Z}(\mathbf{x}) + 2z^{-2}\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = 1.$$

On trouve donc $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{z^2}{z^2 - 3z + 2} = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}$. La décomposition en éléments simples nous donne $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = -\dfrac{z}{z-1} + \dfrac{2z}{z-2}$. (Il suffit en fait de décomposer $\dfrac{\mathcal{Z}(\mathbf{x})}{z} = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ en éléments simples, soit $-\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{2}{z-2}$.) Finalement on obtient $x_n = -1 + 2^{n+1}$.

Exercice 4
Résoudre, en utilisant la transformée en Z, l'équation récurrente

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n - \delta_0(n) = 0$$

avec $x_0 = x_1 = 0$.

Solution 4
Appliquons la transformée en Z. On obtient $z^2\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - 3z\mathcal{Z}(\mathbf{x}) + 2\mathcal{Z}(\mathbf{x}) - 1 = 0$. Cela donne $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{-1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2} = z^{-1}\dfrac{-z}{z-1} + z^{-1}\dfrac{z}{z-2} = z^{-1}\left(\dfrac{-z}{z-1} + \dfrac{z}{z-2}\right)$ et donc $x_0 = 0$, $x_n = -1 + 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ (en particulier $x_1 = 0$), par la propriété du retard.

Exercice 5
On considère une suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit la suite $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$. Déterminer une équation récurrente entre les suites $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. En déduire la transformée en Z de $\mathbf{y}$ (en fonction de celle de $\mathbf{x}$).

Solution 5
Pour tout entier n on a $y_n - y_{n-1} = x_n$, avec $y_{-1} = 0$. Donc $\mathcal{Z}(\mathbf{y}) - z^{-1}\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})$ de sorte que $\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{z\mathcal{Z}(\mathbf{x})}{z-1} = \mathcal{Z}(\mathbf{u})\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \mathcal{Z}(\mathbf{u} * \mathbf{x})$.

Exercice 6
Déterminer la suite $\mathbf{x}$ dont la transformée en Z est $f(z) = \dfrac{4z}{3z^2 - 2z - 1}$.

Solution 6
On a $\frac{f(z)}{z} = \dfrac{4}{3z^2 - 2z - 1} = \dfrac{4}{(3z+1)(z-1)} = \dfrac{a}{z-1} + \dfrac{b}{3z+1}$. Ainsi $4 = a(3z+1) + b(z-1)$. Pour $z = 1$ cela conduit à $a = -\frac{1}{3}$ et avec $z = -\frac{1}{3}$ on a $b = -3$. Ainsi $f(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{3z}{3z+1} = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z+\frac{1}{3}}$. Il en résulte donc que $x_n = 1 - (-\frac{1}{3})^n$.

Exercice 7
Déterminer la suite $\mathbf{x}$ dont la transformée en Z est $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+3)^2}$.

Solution 7
On pose $g(z) = z^{n-1}f(z) = \dfrac{z^{n+1}}{(z+3)^2}$. Il y a un pôle double en $z = -3$. Donc $Res(g(z), -3) = \dfrac{d}{dz}((z+3)^2 g(z))|_{z=-3} = (n+1)(-3)^n$. Il en résulte donc que $x_n = (n+1)(-3)^n$.

Exercice 8
Déterminer, par la méthode des résidus, la suite $\mathbf{x}$ dont la transformée en Z est $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$.

Solution 8
Considérons $g(z) = z^{n-1}f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{(z+1)(z+2)}$ qui possède un pôle simple en 0 quand $n = 0$ mais pas pour $n \geq 1$. Ainsi les cas $n = 0$ et $n \geq 1$ doivent être considérés séparément. Pour $n = 0$, $g(z) = \dfrac{1}{z(z+1)(z+2)}$. Puis $Res(g(z), 0) = \dfrac{1}{2}$, $Res(g(z), -1) = -1$ et $Res(g(z), -2) = \dfrac{1}{2}$ de sorte que $x_0 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$. Pour $n \geq 1$, $g(z) = \dfrac{z^{n-1}}{(z+1)(z+2)}$, on a $Res(g(z), -1) = (-1)^{n-1}$ et $Res(g(z), -2) = -(-2)^{n-1}$, donc $x_n = (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9
Calculer la transformée en Z de $x_n = \cos \omega nT$, ω et T fixés (exprimer-la comme fonction de $\cos \omega T$).

Solution 9
On a $\cos \omega nT = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\omega nT} + e^{-i\omega nT}\right)$ donc $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}(\mathcal{Z}((e^{i\omega nT})_n) + \mathcal{Z}((e^{-i\omega nT})_n))$. Or $\mathcal{Z}((e^{an})_n) = \dfrac{z}{z - e^a}$. Donc $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{z}{z - e^{i\omega T}} + \dfrac{z}{z - e^{-i\omega T}}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{z(z - e^{-i\omega T}) + z(z - e^{i\omega T})}{z^2 - z(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}) + 1}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{2z^2 - z(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T})}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{2z^2 - 2z\cos \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}) = \dfrac{z^2 - z\cos \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$.