Transformée de Fourier

En préambule, voici comment on peut employer la formule d'inversion de Fourier : supposons que l'on dispose d'une fonction f et que l'on cherche une fonction g telle que $\hat{f}(\omega) = g(\omega)$. Donc $\hat{g}(\omega) = \hat{\hat{f}}(\omega) = 2\pi f(-\omega)$.

Exercice 1
Déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

1. $f_1(t)$ vaut 1 sur $[-1, 1]$ et 0 partout ailleurs.
2. $f_2(t) = \mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t-1)$.
3. $f_3(t)$ vaut 1 sur $[-T, T]$ et 0 partout ailleurs ($T > 0$).
4. $f_4(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$ ($T > 0$).
5. $f_5(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.
6. $f_6(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Solution 1

1. On a pour $\omega \neq 0$, $\hat{f}_1(\omega) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} e^{-i\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{t=-1}^{t=+1} = \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega)$.
   Pour $\omega = 0$, on a $\hat{f}_1(0) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} dt = 2$.
2. Attention, ici il faut se garder de croire que l'on peut utiliser la linéarité et la propriété de décalage temporel pour calculer $\hat{f}_2$, c'est-à-dire de poser $\hat{f}_2(\omega) = (e^{i\omega} - e^{-i\omega})\hat{\mathcal{U}}(\omega)$, car la fonction de Heaviside $\mathcal{U}$ n'admet pas de transformée de Fourier (voir le cours). Cependant il est clair que $f_2(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ (où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A, i.e., $\mathbf{1}_A(t) = 0$ si $t \notin A$, et $\mathbf{1}_A(t) = 1$ si $t \in A$). On a donc $\hat{f}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}dt$. Si $\omega = 0$, alors $\hat{f}_2(0) = [t]_{-1}^{1} = 2$ et si $\omega \neq 0$, alors $\hat{f}_2(\omega) = [-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}]_{t=-1}^{t=1} = \dfrac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{2}{\omega}\sin\omega$.
3. On a $\hat{f}_3(\omega) = \displaystyle\int_{-T}^{+T} e^{-i\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{t=-T}^{t=+T} = \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega T)$.
4. On a $\hat{f}_4(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{T}} e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-i\omega t}dt = \left[\frac{e^{\frac{t}{T} - i\omega t}}{\frac{1}{T} - i\omega}\right]_{t\to-\infty}^{t=0} + \left[\frac{e^{-\frac{t}{T} - i\omega t}}{-\frac{1}{T} - i\omega}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} =$ $\dfrac{T}{1 - Ti\omega} + \dfrac{T}{1 + Ti\omega} = \dfrac{2T}{1 + T^2\omega^2}$.
5. Par la règle d'inversion de la transformée de Fourier (et la question 3) on a $f_3(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega}\sin(\omega T)e^{it\omega}d\omega$. En particulier si $T = 1$, on a $f_3(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}e^{it\omega}d\omega$.
   Donc $f_3(-t) = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}e^{-it\omega}d\omega = \frac{1}{\pi}\widehat{\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)}(t)$ de sorte que $\widehat{\left(\frac{\sin t}{t}\right)}(\omega) = \pi f_3(-\omega) = \pi f_3(\omega)$ (puisque f_3 est paire).
6. D'après la question 4 (et la règle d'inversion de la transformée de Fourier), on sait que $f_4(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2T}{1 + T^2\omega^2}e^{it\omega}d\omega$. En posant $T = 1$, on a donc $f_4(t) =$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}e^{it\omega}d\omega = \frac{1}{\pi}\left(\widehat{\frac{1}{1+\omega^2}}\right)(-t)$, de telle sorte que $\left(\widehat{\frac{1}{1+t^2}}\right)(\omega) = \pi f_4(-\omega) = \pi f_4(\omega) = \pi e^{-|w|}$.

Exercice 2

Soit $a > 0$ et soit la fonction $q_a(t) = 1 - \frac{|t|}{a}$ pour $|t| \leq a$ et $q_a(t) = 0$ pour $|t| > a$.

1. Calculer $q_a'(t)$ et l'écrire en fonction de ρ_a. (Rappelons que ρ_a est la fonction impulsion rectangulaire qui vaut 1 sur $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ et 0 ailleurs.)
2. En déduire l'expression de $\widehat{q_a'}(\omega)$.

Solution 2

1. On a $q_a'(t) = -\frac{1}{a}$ pour $t \in]0, a[$, $q_a'(t) = \frac{1}{a}$ pour $t \in]-a, 0[$ et $q_a'(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$. On a $q_a'(t) = \frac{1}{a}(\rho_a(t+\frac{a}{2}) - \rho_a(t-\frac{a}{2}))$ pour tout t disons différent de $0, \pm a$.
2. Le calcul de la transformée de Fourier d'une fonction (si elle existe) est une intégrale donc ne dépend pas des points où la fonction est discontinue. On peut donc supposer que $q_a'(t) = \frac{1}{a}(\rho_a(t+\frac{a}{2}) - \rho_a(t-\frac{a}{2}))$ pour tout t. On a pour $\omega \neq 0$, $\widehat{q_a'}(\omega) = \frac{1}{a}(e^{i\omega\frac{a}{2}} - e^{-i\omega\frac{a}{2}})\hat{\rho}_a(\omega) = \frac{4i}{a\omega}\sin^2(\omega\frac{a}{2})$. Pour $\omega = 0$, on a $\widehat{q_a'}(0) = \frac{1}{a}(e^{i\omega\frac{a}{2}} - e^{-i\omega\frac{a}{2}})\hat{\rho}_a(0) = 2i\sin(\omega\frac{a}{2})$ (puisque $\hat{\rho}_a(0) = a$).

Exercice 3

Soit l'équation $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+a^2}dt = \frac{1}{x^2+b^2}$ pour $0 < a < b$, f absolument intégrable et bornée. Déterminer $\hat{f}$ puis en déduire f.

Solution 3

Posons $g_c(t) = \frac{1}{t^2+c^2}$. On a alors $f * g_a = g_b$ (produit de convolution). Il en résulte donc que $\hat{f}\hat{g}_a = \hat{g}_b$. Or pour $c > 0$, on sait que $\hat{f}_c(\omega) = \frac{2c}{c^2+\omega^2} = 2cg_c(\omega)$ où $f_c(t) = e^{-c|t|}$. Il en résulte que $\hat{g}_c(\omega) = \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_c(t)e^{-i\omega t}dt$ et donc $\hat{g}_c(-\omega) = \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_c(t)e^{i\omega t}dt = \frac{\pi}{c}f_c(\omega)$. Ainsi $\hat{g}_c(\omega) = \frac{\pi}{c}e^{-c|-\omega|} = \frac{\pi}{c}e^{-c|\omega|}$. Comme $0 < a < b$, on en déduit que $\hat{f}(\omega) = \frac{a}{b}e^{-|\omega|(b-a)} = \frac{a}{\pi b}(b-a)\hat{g}_{(b-a)}(\omega)$. Il s'ensuit que $f(t) = \frac{a}{\pi b}(b-a)g_{(b-a)}(t) = \frac{a(b-a)}{\pi b}\frac{1}{t^2+(b-a)^2}$.

Exercice 4

Soit la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ pour $a > 0$.

1. Calculer sa transformée de Fourier (sans utiliser le formulaire).
2. En déduire la transformée de Fourier de $g\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer le produit de convolution $f * f$ et en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Solution 4

1. Puisque pour $x, y \in \mathbb{R}$ donnés, on a $\frac{d}{dt}e^{(x+iy)t} = (x+iy)e^{(x+iy)t}$, il en résulte que
$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^0 e^{at}e^{-i\omega t}dt = -\left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{t\to-\infty}^{t=0}.$$
Maintenant, $\lim_{R\to+\infty} e^{-(a+i\omega)R} = \lim_{R\to+\infty} e^{-aR}e^{-i\omega R} = 0$ puisque $|e^{-i\omega R}| = 1$ et $\lim_{R\to+\infty} e^{-aR} = 0$ pour $a > 0$. De façon similaire, $\lim_{R\to-\infty} e^{(a-i\omega)R} = 0$.

   Ainsi $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$.
2. Pour $a = 1$, on a $\hat{f}(\omega) = 2g(\omega)$. On en déduit (par le théorème d'inversion) que $\hat{g}(\omega) = \pi f(-\omega)$, c'est donc $\omega \mapsto \pi e^{-|\omega|}$.
3. Calculons le produit de convolution. On a
$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(|x-y|+|y|)}dy = \int_{-\infty}^0 e^{-a(|x-y|-y)}dy + \int_0^{+\infty} e^{-a(|x-y|+y)}dy.$$
Si $x > 0$, on a
$$f*f(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-a(x-2y)}dy + \int_0^x e^{-ax}dy + \int_x^{+\infty} e^{-a(2y-x)}dy = \frac{e^{-ax}}{2a} + xe^{-ax} + e^{ax}\frac{e^{-2ax}}{2a} = e^{-ax}(x+\frac{1}{a}).$$
Or la fonction f est paire. Il en est de même de $f*f$ (en effet $f*f(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x-y))f(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)f(-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-(-y))f(-y)dy = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-z)f(z)dz = (f*f)(x)$). On en déduit donc que $f*f(x) = e^{-a|x|}(|x|+\frac{1}{a})$. La transformée de Fourier de $f*f$ est $\widehat{f*f}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$. En particulier pour $a = 1$, on a $\widehat{(f*f)}(\omega) = \widehat{f}(\omega)^2 = 4\frac{1}{(1+\omega^2)^2}$. En appliquant l'inverse de la transformée de Fourier il en résulte que la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est la fonction $\frac{\pi}{2}f*f(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}(|\omega|+1)$.
4. Remarquons que la dérivée de $x \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Posons $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$. On a donc $h(x) = -\frac{1}{2}g'(x)$. Donc $\hat{h}(\omega) = -\frac{1}{2}\widehat{g'}(\omega)$. Or g est bien sûr de classe C^1 et $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. On peut donc appliquer la règle de dérivation dans le domaine temporel et en déduire que $\hat{h}(\omega) = -\frac{i}{2}\omega\widehat{g}(\omega) = -\frac{i\pi}{2}\omega e^{-|\omega|}$.

Exercice 5

Pour $t > 0$, on pose $S_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Calculer sa transformée de Fourier de deux façons différentes (dont l'une utilisant la formule d'inversion). En déduire que l'ensemble $\{ S_t \colon t > 0 \}$ forme un semi-groupe pour le produit de convolution (i.e., qu'il est clos par le produit de convolution, et que ce dernier est associatif).

Solution 5
1ère méthode : On sait que pour la fonction gaussienne $g_a(t) = e^{-at^2}$ $(a > 0)$, on a $\hat{g}_a(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$. Il suffit donc d'observer que $S_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} g_{\frac{1}{4t}}(x)$ de sorte que $\widehat{S}_t(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \widehat{g}_{\frac{1}{4t}}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sqrt{\dfrac{\pi}{1/4t}} e^{-t\omega^2} = e^{-t\omega^2}$. Seconde méthode : $S_t(x) = \dfrac{1}{2\pi} \hat{g}_t(x)$. Il vient donc par la formule d'inversion $\hat{S}_t(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \hat{\hat{g}}_t(\omega) = g_t(-\omega) = e^{-t\omega^2}$. Puis, $\widehat{S_t * S_s}(\omega) = \hat{S}_t(\omega) \hat{S}_s(\omega) = e^{-a(s+t)\omega^2} = \hat{S}_{s+t}(\omega)$. Donc par une conséquence de la formule d'inversion vue en cours, on en déduit que $S_t * S_s = S_{s+t}$. Il en résulte que $\{ S_t \colon t > 0 \}$ est clos pour le produit de convolution. Celui-ci est bien entendu associatif (puisque $S_r * (S_s * S_t) = S_{r+s+t} = (S_r * S_s) * S_t$, où on a utilisé l'associativité de l'addition).

Exercice 6
Le but de cet exercice est de chercher des fonctions u absolument intégrables et bornées vérifiant pour tout x réel,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy,$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution pour $\beta < \dfrac{1}{2}$.

Solution 6
En posant $f(x) = e^{-|x|}$, il est évident que l'équation peut s'écrire $u = f + \beta u * f$. Soit $\beta < 1/2$. On suppose qu'il existe une solution u absolument intégrable. En appliquant la transformée de Fourier, il vient

$$\hat{u} = \hat{f} + \beta \hat{u} \hat{f}$$

soit encore $\hat{u} = \dfrac{\hat{f}}{(1 - \beta \hat{f})}$. Or $\hat{f}(\omega) = \dfrac{2}{1 + \omega^2}$, de sorte que $\hat{u}(\omega) = \dfrac{2}{1 - 2\beta + \omega^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\beta}} \left(\dfrac{2\sqrt{1-2\beta}}{(1-2\beta) + \omega^2} \right)$ (pour tout $\beta < \dfrac{1}{2}$) $= \dfrac{1}{\sqrt{1-2\beta}} \hat{f}_{\sqrt{1-2\beta}}(\omega)$ où, pour $a > 0$, on pose $f_a(t) = e^{-a|t|}$. Si on suppose en plus que u est continue, alors par la formule d'inversion, on en déduit que $u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\beta}} f_{\sqrt{1-2\beta}}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\beta}} e^{-\sqrt{1-2\beta}|t|}$.

Exercice 7
On considère une tige homogène très mince de longueur infinie. La température de la tige au temps $t \geq 0$ et au point d'abscisse $x \in \mathbb{R}$ est notée $u(t, x)$. On suppose que cette fonction vérifie l'équation suivante (dite équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ avec pour condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$. On suppose que u_0 est absolument intégrable et bornée, et on cherche une solution à l'équation de la chaleur qui soit C^1 par rapport à la variable temps et C^2 par rapport à la variable d'espace. On suppose que l'équation précédente possède une solution u telle qu'il existe une fonction g absolument intégrable, tendant vers 0 en l'infini, vérifiant, pour tout $t \geq 0$,

$$|u(t, x)| \leq g(x), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right| \leq g(x), \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq g(x).$$

On note $\hat{f}_x(t,\omega)$ la transformée de Fourier d'une fonction $(t,x) \mapsto f(t,x)$ par rapport à la variable d'espace x, i.e., $\hat{f}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)e^{-is\omega}ds$. On admet que $\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_x = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_x$ (cela provient de $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$), c'est-à-dire que l'on peut permuter les symboles d'intégration et de dérivation dans $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx}ds \frac{\partial u}{\partial t}(t,s)$.

1. Montrer que $\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_x = -x^2\hat{u}_x$.
2. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, on note $v(t) = \hat{u}_x(t,x)$. Montrer que v est solution d'une équation différentielle en t.
3. Résoudre cette équation.
4. En déduire une valeur de u.

Solution 7

1. Puisque $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables, par une double intégration par parties :

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_x(t,x) = -x^2\hat{u}_x(t,x).$$

   En effet, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_x(t,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,s)e^{-isx}ds \\
&= \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(t,s)e^{-isx}\right]_{s\to-\infty}^{s\to+\infty}}_{=0} + ix\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}e^{-isx}ds \\
&= ix\left(\underbrace{\left[u(t,s)e^{-isx}\right]_{s\to-\infty}^{s\to+\infty}}_{=0} + ix\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,s)e^{-isx}ds\right) \\
&= -x^2\hat{u}_x(t,x).
\end{aligned} \tag{1}$$

2. Le fait d'appliquer la transformée de Fourier (en x) sur l'équation initiale donne, pour x fixé

$$v'(t) + x^2 v(t) = 0.$$

   (Rappelons que l'on a admis que $\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_x = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_x$, c'est-à-dire $v'(t) = \widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_x$, et pour le second terme du membre de gauche, on utilise la propriété de dérivation dans le domaine temporel, ici la variable x.)
3. Pour x fixé, on obient $\hat{u}_x(t,x) = h(x)e^{-x^2 t}$. Mais $u(0,x) = u_0(x)$ donc $\hat{u}_x(0,x) = \hat{u}_0(x)$, ce qui donne $\hat{u}_x(t,x) = \hat{u}_0(x)e^{-x^2 t}$.
4. Soit $g_a(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, la fonction gaussienne. On sait que $\hat{g}_a(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
   Il s'ensuit que $e^{-x^2 t}$ est la transformée de Fourier de $k_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}}g_{\frac{1}{4t}}(x)$, et donc, d'après la question précédente, $\hat{u}_x(t,x) = \hat{u}_0(x)\hat{k}_t(x) = \widehat{(u_0 * k_t)}(x)$. Par la propriété d'inversion de la transformée de Fourier on en déduit que l'on a $u(t,x) = (u_0 * k_t)(x)$.

Exercice 8
Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$$

Solution 8
On sait d'après le cours que $\hat{q}_1(\omega) = \dfrac{4\sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2}$ où q_1 est la fonction triangle ($q_1(t) = 1 - |t|$ pour $|t| \leq 1$ et 0 ailleurs). Donc $\hat{q}_1(2\omega) = \dfrac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{q}_1(2\omega))^2 d\omega \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{q}_1(\tau))^2 d\tau \\
&\quad \text{(par le changement de variables } \tau = 2\omega) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (q_1(t))^2 dt \\
&\quad \text{(par l'identité de Plancherel)} \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_{-1}^{0} (1+t)^2 dt + \int_0^1 (1-t)^2 dt \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left([\frac{t^3}{3} + t^2 + t]_{-1}^0 + [\frac{t^3}{3} - t^2 + t]_0^1 \right) \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned} \tag{2}$$