Outils Mathématiques - Chapitre VII : Série de Fourier

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Intégrales multiples.
- Chap. VI : Transformée de Laplace.
- Chap. VII : Série de Fourier.
- Chap. VIII : Transformée de Fourier.
- Chap. IX : Transformée en Z.

Table des matières

Objectifs du chapitre

Les séries trigonométriques sont des séries de fonctions dont le terme général s'écrit sous la forme $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ ou encore $c_n e^{int}$.

Jean-Baptiste Fourier (1768–1830) a montré que de très nombreuses fonctions périodiques peuvent s'écrire comme la somme d'une telle série.

Cela signifie que l'on peut représenter une fonction périodique (suffisamment régulière) sous la forme d'une somme infinie de fonctions cosinus et sinus.

Dans ce chapitre sont présentées les hypothèses sous lesquelles une telle représentation est possible, ainsi que les calculs des coefficients a_n et b_n.

Table des matières

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On dit que T est une période de f, et que f est une fonction T-périodique, si

$$f(x+T) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Observons que si f est T-périodique, alors elle est également kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (en effet $f(x+0) = f(x)$ pour tout x, puis pour $n > 0$, $f(x+nT) = f(x+(n-1)T+T) = f(x+(n-1)T) = \cdots = f(x+0T) = f(x)$, et pour $n < 0$, $f(x+nT) = f(x+(n+1)T) = \cdots = f(x+(n+(-n))T) = f(x)$).

Si $T > 0$ est la plus petite période positive de f, elle est dite période fondamentale de f.

Une fonction est non périodique si sa seule période est 0. On dit qu'une fonction est périodique si elle admet une période non nulle.

Remarque

Il n'est pas vrai que chaque fonction périodique admet une période fondamentale (penser par exemple à la fonction indicatrice des rationnels).

Par contre, toute fonction périodique réglée (i.e., limite uniforme de fonctions en escalier) admet une période fondamentale.

Propriétés des fonctions périodiques

- Les somme et produit (ponctuels) de fonctions T-périodiques sont T-périodiques.

- Lorsqu'elle existe, la limite simple d'une suite de fonctions T-périodiques est également une fonction T-périodique.

- Changement de période : Si f est une T-périodique, alors, pour tout $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(ax)$ est $\frac{T}{a}$-périodique. (En effet, $f(a(x + \frac{T}{a})) = f(ax + T) = f(ax)$.)

Remarque

Dans la suite nous nous intéressons essentiellement aux fonctions 2π-périodiques. Par le changement de période, les résultats resteront valides pour des fonctions périodiques (donc admettant une période non nulle).

Périodicité et dérivation

Proposition

Si f est une fonction T-périodique et qu'elle est dérivable, alors sa fonction dérivée est également T-périodique.

Preuve

Il suffit d'observer que pour tout réel x_0 et tout $h \neq 0$,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+T+h)-f(x_0+T)}{h}$$

et donc que les dérivées en x_0 et en x_0+T sont égales. □

Valeur moyenne sur une période

Lemme

Si une fonction réglée[a] f est périodique, alors le nombre

$$M_f = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx$$

est indépendant du choix de la borne d'intégration a et également du choix de T parmi les périodes non nulles de f.

[a] C'est-à-dire qui en tout point admet une limite à gauche et une limite à droite.

Autrement dit, si a, b sont deux réels et T, U sont deux périodes non nulles de f, alors $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{S}\int_b^{b+S} f(x)dx$.

Le nombre M_f s'appelle la valeur moyenne de f sur une période.

Preuve (esquisse)

On a
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$
En effectuant le changement de variables $x = y + T$ dans la seconde intégrale du membre de droite il vient (par $f(y+T) = f(y)$)
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^T f(x)dx.$$
Soit maintenant S une autre période non nulle de f, par exemple $S = nT$, $n \neq 0$. Alors
$$\int_0^S f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx.$$
Finalement, on a $\dfrac{1}{S}\displaystyle\int_b^{b+S} f(x)dx = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_0^S f(x)dx = \dfrac{1}{nT} n \displaystyle\int_0^T f(x)dx =$ $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx.$ □

Remarque

De la preuve précédente nous pouvons tirer le fait que lorsque T est une période de f, alors l'intégrale

$$\int_a^{a+T} f(x)dx$$

ne dépend pas du choix de la borne a.

Remarque

Une primitive d'une fonction périodique n'est pas nécessairement périodique : par exemple une fonction constante $x \mapsto c$, $c \neq 0$, est périodique (tout réel est une période). Par contre une primitive de celle-ci, donnée par $x \mapsto cx + d$, n'est pas périodique.

Par contre, si la valeur moyenne de f sur une période est nulle, alors toute ses primitives sont périodiques puisque

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt.$$

Prolongement

Soit f une fonction (continue par morceaux) sur un intervalle $]a, a+T]$ (avec $T > 0$). Alors f admet un unique prolongement g T-périodique (continue par morceaux) à $\mathbb{R}$, i.e., g est une fonction (continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$, T-périodique, et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, a+T]$.

Il suffit de voir que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]a + nT, a + (n+1)T]$, et donc de poser $g(x) = f(x - nT)$. (De nouveaux points de discontinuité peuvent apparaître aux points $a + nT$, $n \in \mathbb{Z}$.)

Table des matières

Définition (cas réel)

On appelle polynôme trigonométrique réel de degré inférieur ou égal à n toute combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto \cos kt$ et $t \mapsto \sin kt$ avec $0 \leq k \leq n$.

Une telle combinaison linéaire s'écrit donc sous la forme

$$t \mapsto S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

où les a_k, b_k sont des réels (éventuellement nuls).

Lemme

L'ensemble des polynômes trigonométriques réels forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (addition et multiplication scalaire ponctuelles), noté $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Preuve

Soient $t \mapsto P(t) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ et $t \mapsto Q(t) = \sum_{k=0}^{n}(c_k \cos kt + d_k \sin kt)$ deux membres de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $\lambda P + \mu Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Soit $t \in [0, 2\pi]$. On a

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda P + \mu Q)(t) & = & \lambda P(t) + \mu Q(t) \\
 & = & \lambda \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \\
 & + & \mu \sum_{k=0}^{n}(c_k \cos kt + d_k \sin kt) \\
 & = & \sum_{k=0}^{n}((\lambda a_k + \mu c_k) \cos kt + (\lambda b_k + \mu d_k) \sin kt). \quad \square
\end{array}$$

Base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

Proposition

Posons $e_0 \colon t \mapsto c$ (pour $c \neq 0$), $e_k \colon t \mapsto \cos kt$, et $e_{n+k} \colon t \mapsto \sin kt$, $k = 1, \cdots, n$.

La famille $\mathcal{B}_c = \{\, e_k \colon 0 \leq k \leq 2n \,\}$, pour tout c non nul, est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, lequel est donc un espace vectoriel de dimension $2n + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve (1/4)

Il est clair que la famille $\mathcal{B}_c$ engendre $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ par définition de ce dernier.

Il nous faut donc montrer que cette famille est linéairement indépendante sur $\mathbb{R}$, i.e., si $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (les fonctions sont 2π-périodiques), alors $a_k = 0 = b_k$ pour tout $k = 0, \cdots, n$.

Pour ce faire nous utilisons des notions tirées des espaces euclidiens. Introduisons un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ par

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Il est donc symétrique, $\mathbb{R}$-bilinéaire et défini positif[1] (i.e., $\langle f \mid f \rangle > 0$ si f n'est pas la fonction identiquement nulle; autrement dit, $\langle f \mid f \rangle \geq 0$ et $\langle f \mid f \rangle = 0$ si, et seulement si, f est la fonction identiquement nulle).

[1] Dans ce cas précis on a $\langle f \mid f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$, or, si la fonction f est un polynôme trigonométrique, alors elle est continue de sorte que $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0$ implique que f est identiquement nulle.

Preuve (2/4)

Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}_c$ est une famille orthogonale, i.e., $\langle e_i \mid e_j \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$ $(0 \leq i, j \leq 2n)$.

- $\langle e_{n+i} \mid e_j \rangle = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ and $0 \leq j \leq n$. (Cela provient du fait que par 2π-périodicité on peut intégrer sur $[-\pi, +\pi]$ sans changer le résultat, et que $t \mapsto e_{n+i}(t)e_j(t)$ est une fonction impaire.)
- $\langle e_{n+i} \mid e_{n+j} \rangle = 0$ pour $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n)$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} \langle e_{n+i} \mid e_{n+j} \rangle & = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(ix)\sin(jx)dx \\ & = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((i-j)x) - \cos((i+j)x))dx \\ & & (\text{car } \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))) \\ & = & 0 \end{array}$$

car $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 0$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et vaut 1 si $k = 0$.
On vient aussi en particulier de montrer que $\langle e_{n+i} \mid e_{n+i} \rangle = 1$.

Preuve (3/4)

- De même on a $\langle e_i \mid e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n)$. En effet,

$$\begin{aligned}\langle e_i \mid e_j \rangle &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(ix)\cos(jx)dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos((i-j)x)+\cos((i+j)x))dx\end{aligned}$$

(puisque $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$).

Cela montre aussi au passage que $\langle e_i \mid e_i \rangle = 1$.

Preuve (4/4)

L'orthogonalité de la famille $\mathcal{B}_c$ (constituée de vecteurs non nuls) conduit immédiatement à son indépendance linéaire.

En effet, supposons que $\mathcal{B}_c$ ne soit pas linéairement indépendante de sorte qu'il existe des réels non nuls $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n+1}$ tels que
$c\alpha_1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+1} e_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+k+1} e_{n+k}(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

Par bilinéarité du produit scalaire, on en déduit que pour tout
$\ell \in \{\, 0, \cdots, 2n \,\}$

$$
\begin{array}{rcl}
0 = \langle \mathbf{0} \mid e_\ell \rangle & = & \langle c\alpha_1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+1} e_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+k+1} e_{n+k}(t) \mid e_\ell \rangle \\
& = & \alpha_1 \langle c \mid e_\ell \rangle + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+1} \langle e_k \mid e_\ell \rangle \\
& + & \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+k+1} \langle e_{n+k} \mid e_\ell \rangle \\
& = & \alpha_{\ell+1} \langle e_\ell \mid e_\ell \rangle
\end{array}
$$

(où $\mathbf{0}$ désigne la fonction identiquement nulle) de sorte que $\alpha_{\ell+1} = 0$ (puisque $\langle e_\ell \mid e_\ell \rangle \neq 0$) ce qui contredit les hypothèses. $\square$

Définition (cas complexe)

On appelle polynôme trigonométrique complexe de degré inférieur ou égal à n toute combinaison linéaire (complexe) de fonctions de la forme $t \mapsto e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq |k| \leq n$.

Il s'agit donc de fonctions de la forme $t \mapsto S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$.

On dénote par $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition

$\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe de dimension $2n+1$.

Preuve (esquisse)

La famille $\mathcal{G}_n = \{\, t \mapsto e^{ikt} : 0 \leq |k| \leq n \,\}$ engendre bien sûr $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$.

On peut ensuite reprendre la démonstration du cas réel en utilisant le produit scalaire hermitien[a]

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué complexe de $z \in \mathbb{C}$.

Le reste de la démonstration est identique car $\langle e^{ikx} \mid e^{i\ell x} \rangle = 0$ si $k \neq \ell$ et vaut 1 si $k = \ell$. $\square$

[a] Il est sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, et c'est une forme définie positive.

Pour aller plus loin

Seules les fonctions qui sont des polynômes trigonométriques réels (respectivement, complexes) de degré au plus n s'écrivent (de façon unique) comme une combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto \cos(kt) + \sin(kt)$ (respectivement, $t \mapsto e^{ikt}$) pour $0 \leq k \leq n$ (respectivement, pour $0 \leq |k| \leq n$).

En considérant la limite inductive $\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), on obtient un espace vectoriel "plus gros" qui permet de décomposer plus de fonctions en sinusoïdales élémentaires.

Si on abandonne l'aspect purement algébrique, il s'avère que l'on peut faire bien mieux : en passant de l'espace pré-hilbertien $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ à sa complétion hilbertienne on obtient une classe de fonctions qui admettent une décomposition comme combinaison linéaire (infinie !) de sinusoïdales élémentaires.

Ce n'est pas exactement le chemin que l'on va suivre. Nous allons plutôt considérer des séries trigonométriques "formelles" (sans présumer de leur convergence), puis nous étudierons plusieurs modes de convergence.

Table des matières

Définition

On appelle série trigonométrique réelle toute série de fonctions dont le terme général est de la forme

$$t \mapsto f_n(t) = \begin{cases} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) & \text{pour } n \geq 1, \\ \dfrac{a_0}{2} & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

On appelle série trigonométrique complexe toute série de fonctions dont le terme général est de la forme

$$t \mapsto f_n(t) = \begin{cases} c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int} & \text{pour } n \geq 1, \\ c_0 & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

avec $c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}$.

Lien entre les deux sortes de séries

On utilise la formule de Moivre $\cos a = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia})$ et $\sin a = \frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia})$ pour obtenir : $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = a_n(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2}) + b_n(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}) = (\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i})e^{int} + (\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i})e^{-int}$, d'où $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}$, $c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}$ et $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

Réciproquement :
$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = (c_n + c_{-n})\cos(nt) + i(c_n - c_{-n})\sin(nt)$, d'où $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $a_0 = 2c_0$. Ici il faut encore montrer que a_n, b_n sont des réels, ce qui est vrai si, et seulement si, $c_n = \overline{c_{-n}}$ et que $c_0 \in \mathbb{R}$.

Critères de convergence simple (admis)

Cas réel

Soit S une série trigonométrique réelle.

Si les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont positives, décroissantes, de limite 0, alors la série converge simplement en tout point $x \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π.

Cas complexe

Soit S une série trigonométrique complexe.

Si les deux suites $(c_n)_n$ et $(c_{-n})_n$ sont positives, décroissantes, de limite 0, alors la série converge simplement en tout point $x \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π.

(Ce sont tout simplement des applications du théorème d'Abel[2].)

[2] Ce dernier énonce que pour une série de nombres réels de terme général $a_n b_n$ où a_n est une suite positive, décroissante vers 0 et qu'il existe un réel B tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{i=0}^{n} b_i| \leq B$, alors la série converge.

Critères de convergence normale

Cas réel

Si les deux séries de termes généraux respectifs a_n et b_n sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique réelle de terme général $f_n\colon t \mapsto a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$, converge normalement (i.e., $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty < +\infty$).

Preuve

On a $\sup\{\,|a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)|\colon t \in \mathbb{R}\} \leq |a_n| + |b_n|$. Or les séries sont absolument convergentes, donc la série de terme général $t \mapsto a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ est bien normalement convergente. □

Cas complexe

Si les séries de termes généraux respectifs c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique complexe de terme général $t \mapsto c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}$ converge normalement.

Conséquence (admise)

Proposition

Si une série trigonométrique réelle ou complexe est normalement convergente, alors la somme de la série est une fonction continue, et la série est intégrable terme à terme.

Table des matières

Objectif

Le but est ici d'étudier dans quelle mesure une fonction f peut être obtenue comme la somme d'une série trigonométrique par exemple réelle, et, dans ce cas, de présenter la méthode de calcul des coefficients a_n, b_n en fonction de f.

Cette décomposition en "série de Fourier" d'une fonction possède de très nombreuses applications en physique notamment dans l'étude des phénomènes vibratoires (somme, courant alternatif, marée, etc.).

Par exemple si f est la mesure de l'amplitude d'un son (comme fonction du temps), sa représentation en série de Fourier permet de décomposer le son en fonction de composantes élémentaires, c'est-à-dire des sinusoïdales $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$, qui apparaissent comme la contribution de la fréquence $\frac{2\pi}{n}$ au son.

Coefficients de Fourier d'une fonction

Définition

Soit f une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$.

On appelle coefficients de Fourier réels de f les nombres
$a_n = a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n = b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

La série de Fourier réelle Sf de f est alors la série trigonométrique réelle $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$ (ici, on ne suppose pas que la série converge).

Les coefficients de Fourier complexes de f sont les nombres
$c_n = c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

La série de Fourier complexe Sf de f est alors la série trigonométrique complexe $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ (ici encore, on ne suppose pas que la série converge).

Lemme

Supposons que f est 2π-périodique.

Si f est paire, alors tous les b_n sont nuls.

Si f est impaire, alors tous les a_n sont nuls.

Fonctions C^1 par morceaux

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite C^1 par morceaux sur $[a, b]$ si sa dérivée est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Plus précisément, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, f est dérivable sur $[x_{i-1}, x_i]$ et sa dérivée y est continue.

Théorème de Dirichlet (admis)

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$ et 2π-périodique.

Alors sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Sa somme en $x \in \mathbb{R}$ est égale à $f(x)$ si f est continue en x, et sinon elle est égale à $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, où $f(x^+) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x+h)$ et $f(x^-) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} f(x+h)$.

Remarque

Il résulte du théorème de Dirichlet qu'il n'est pas toujours vrai que la série de Fourier d'une fonction f, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, converge simplement vers f. C'est cependant le cas si la fonction satisfait en outre, pour tout x, $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Dans le cas général, la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Espaces pré-hilbertiens

La forme bilinéaire $\langle f \mid g \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ continue d'être un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques, à valeurs réelles, et la famille des fonctions $t \mapsto \cos mt$, $t \mapsto \sin nt$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est orthogonale (i.e., si on prend deux fonctions distinctes f, g de cette famille, alors $\langle f \mid g \rangle = 0$).

De façon semblable, la forme sesquilinéaire $\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques, à valeurs complexes, et la famille de fonction $t \mapsto e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, est orthonormale (i.e., orthogonale, et si f est une fonction de cette famille, alors $\langle f \mid f \rangle = 1$).

Remarque : Projection orthogonale

Soit f une fonction continue, 2π-périodiques, à valeurs réelles (respectivement, complexes). On note $S_nf(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt))$ (respectivement, $S_nf(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}$) la n-ième somme de Fourier de f.

L'application $f \mapsto S_nf$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ (respectivement, $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$), autrement dit, $\langle f - S_nf \mid S_nf \rangle = 0$.

Propriétés (admises)

- Deux fonctions 2π-périodiques et continues, qui partagent la même série de Fourier sont égales.

- Soit f une fonction 2π-périodique et continue. Si la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa somme est égale à f.

Convergence en moyenne quadratique

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, continues par morceaux et 2π-périodiques.

On dit que $(f_n)_n$ converge en moyenne quadratique vers f (également continue par morceaux, et 2π-périodique) si

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Remarque

Lorsque les fonctions f_n et f sont continues, cela revient à dire que $(f_n)_n$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé des fonctions continues et 2π-périodiques équipé de la norme issue du produit scalaire.

Remarque

Attention, s'il est vrai que $\|\cdot\|_2 \colon f \mapsto \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$ est bien une norme pour l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques, ce n'est pas le cas pour l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques.

Dans ce dernier cas, il se peut que l'on ait $\|f\|_2 = 0$ sans que f soit uniformément nulle (autrement dit, $\|\cdot\|_2$ n'est qu'une semi-norme).

Theorème (admis)

Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique.

Alors sa série de Fourier converge en moyenne quadratique vers f et vers sa régularisée (la fonction $f^*\colon t \mapsto \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$), i.e., $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |S_n f(t) - f(t)|^2 dt = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |S_n f(t) - f^*(t)|^2 dt = 0$.

De plus, la formule de Parseval est satisfaite :

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)^2 + b_n(f)^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt.$$

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n\geq 1}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt.$$

Unicité de la décomposition en série trigonométrique

Proposition (admise)

Soient deux séries trigonométriques réelles S et T de termes généraux respectifs $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ et $c_n \cos(nt) + d_n \sin(nt)$.

Si S et T convergent simplement vers la même fonction f et si les séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(c_n^2 + d_n^2)$ convergent, alors, pour chaque n, $a_n = c_n$ et $b_n = d_n$.

Théorème (admis)

Si f est une fonction 2π-périodique, C^1 par morceaux et continue, alors sa série de Fourier converge normalement vers f.