Série de Fourier

Exercice 1
Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que $Sf(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$. (On ne s'intéresse pas ici à la convergence de Sf.)
2. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $Sf(x) = x$ (convergence simple).
3. Qu'en est-il de la convergence simple de la série Sf en $x = \pi$?
4. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Solution 1

1. Attention : s'il est vrai que $f(t) = t$ sur $]-\pi, \pi]$, il est faux que $f(t) = t$ sur $]\pi, 2\pi]$, puisque, par construction, $f(t) = x - 2\pi$ pour $t \in]\pi, 2\pi]$. On a $a_n(f) = 0$ puisque f est impaire. Une intégration par partie (avec $u = t$, $v' = \sin nt$ donc $v = -\frac{\cos nt}{n}$) donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t\sin(nt)dt$ (2π-périodique) $= \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt$ (par parité comme produit de fonctions impaires) $= -2\dfrac{\cos n\pi}{n} + \underbrace{2\dfrac{\sin n\pi}{n^2\pi}}_{=0} = -2\dfrac{(-1)^n}{n}$.
2. La fonction f n'est pas continue sur $]-\pi, \pi]$ puisque $f(\pi) = \pi$ alors que $f((-\pi)^+) = -\pi$. Elle est bien C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ puisqu'elle est C^1 sur $]-\pi, \pi[$. Le théorème de Dirichlet affirme que Sf converge simplement vers x sur $]-\pi, \pi[$ (et vers $\dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 0$ pour $x = \pm\pi$).
3. Dans le cas où $x = \pi$, tous les termes de la série sont nuls, donc la série converge également simplement vers 0 dans ce cas.
4. En appliquant la formule de Parseval (ce qui est légitime car f est continu par morceaux sur $[-\pi, \pi]$), on a $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt$, soit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-2(-1)^n n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}$, et $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(t))^2dt$ (par parité) $= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2dt = \frac{2}{\pi}[\frac{t^3}{3}]_0^{\pi} = \dfrac{2\pi^2}{3}$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2
Soit f 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = 1$ sur $]0, \pi[$ et $f(n\pi) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. Représenter f.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x)$.
3. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.
4. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

5. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Solution 2

1. Facile.
2. On a $a_n(f) = 0$ puisque f est impaire. Une intégration directe donne pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\ dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt$ (par parité) $= \dfrac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)}$. La fonction f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique de sorte que l'on peut appliquer le théorème de Dirichlet. Donc la série de Fourier de f converge simplement vers $\dfrac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) = f(x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$. On a donc le résultat attendu.
3. Il suffit de prendre $x = \frac{\pi}{2}$.
4. On peut appliquer la formule de Parseval puisque f est continue par morceaux. Donc $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt$. On a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{\pi(2n+1)}\right)^2 = \dfrac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$, et $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dt = \dfrac{1}{\pi}(2\pi) = 2$, de sorte que $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.
5. Comme $\sum_{n=1}^{2N+1}\dfrac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N}\dfrac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N}\dfrac{1}{(2p+1)^2}$. On peut passer à la limite (car toutes les séries convergent) donc $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{\pi^2}{8}$. Donc $\dfrac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Enfin, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\pi^2}{8}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Exercice 3

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Solution 3

1. La fonction f est paire. On obtient pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n}(f) = \dfrac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)}$ et $a_{2n+1}(f) = 0$ et $b_n(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le détail des calculs : pour $n = 0$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\cos t|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos t|dt$ (parité) $= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos tdt - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos tdt\right) = \frac{2}{\pi}([\sin t]_0^{\pi/2} - [\sin t]_{\pi/2}^{\pi}) = \frac{4}{\pi}$. Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos t|\cos nt\ dt \\ & = & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos t|\cos nt\ dt \\ & = & \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos t\cos nt\ dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos t\cos nt\ dt\right) \\ & = & \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(\cos(n+1)t\ +\ \cos((n-1)t)\ dt) - \int_{\pi/2}^{\pi}(\cos(n+1)t\ +\ \cos(n-1)t\ dt)\right) \\ & & (\text{puisque } \cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b.) \end{array} \tag{1}$$

Si $n = 1$, alors $a_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(\cos(2t)\ +1)dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(2t)+1)dt\right) = \frac{1}{\pi}([\frac{\sin(2t)}{2} + t]_0^{\pi/2} - [\frac{\sin(2t)}{2}+t]_{\pi/2}^{\pi}) = 0$. Supposons $n > 1$. On a $a_n = \frac{1}{\pi}([\frac{\sin((n+1)t)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)t)}{n-1}]_0^{\pi/2} -$

$[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)t)}{n-1}]_{\pi/2}^{\pi}) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin((n+1)\pi/2)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)\pi/2)}{n-1}\right)$. Si n est impair, $n = 2p+1$, alors $a_{2p+1} = \frac{2}{\pi}(\frac{\sin((p+1)\pi)}{2p+2} + \frac{\sin(m\pi)}{2m}) = \frac{1}{\pi}(\underbrace{\frac{\sin((m+1)\pi)}{m+1}}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin(m\pi)}{m}}_{=0}) = 0$. Si n est pair, $n = 2p$, alors

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{\sin((2p+1)\pi/2)}{2p+1} + \tfrac{\sin((2p-1)\pi/2)}{2p-1}\right) \\ &= \tfrac{2}{\pi}\frac{(2p-1)\sin((2p+1)\pi/2) + (2p+1)\sin((2m-1)\pi/2)}{4p^2-1} \\ &= \frac{2(-1)^{m+1}2}{\pi(4p^2-1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. La fonction f est de classe C^1 par morceaux, il y a donc convergence simple (théorème de Dirichlet) de la série de Fourier vers $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)$. En $x=0$, la fonction f est continue, de sorte que l'on a $1 = f(0) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)}$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4}\frac{\pi-2}{\pi} = \frac{\pi-2}{4}$.

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

sur $]0,\pi]$.

1. Préciser la convergence de la série de Fourier réelle de f.
2. Calculer la série de Fourier réelle de f.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution 4

1. f est C^1 par morceaux et vérifie $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$ pour tout réel x, donc la série de Fourier de f converge simplement vers f en vertu du théorème de Dirichlet.
2. La fonction f est paire. On a donc $a_n = 0$ pour tout entier naturel n. Par intégration par parties on trouve $b_n = \frac{1}{n}$. Le détail du calcul :

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \\ &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\tfrac{(\pi-t)}{2}\sin(nt)\,dt \\ &\ \text{(par parité)} \\ &= \tfrac{1}{\pi}([-(\pi-t)\tfrac{\cos(nt)}{n}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1\times(-\tfrac{\cos(nt)}{n})dt) \\ &\ \text{(intégration par parties)} \\ &= \tfrac{1}{\pi}(\tfrac{\pi}{n} - \int_0^{\pi}\tfrac{\cos nt}{n}dt) \\ &= \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2\pi}\underbrace{[\frac{\sin(nt)}{n^2}]_0^{\pi}}_{=0} \\ &= \tfrac{1}{n}. \end{aligned} \tag{3}$$

La série de Fourier de f permet d'écrire $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

3. Pour $x=1$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \dfrac{\pi-1}{2}$.
4. Par la formule de Parseval,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \dfrac{(\pi-t)^2}{4}dt = \dfrac{1}{6\pi}[-(\pi-t)^3]_0^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique définie par $f(x)=e^x$ pour $x\in]-\pi,\pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Solution 5
1. Par définition pour $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$. Après calcul, on obtient $c_n(f) = \dfrac{\sinh\pi}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{1-in}$ (rappel : $\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$). En détail :

$$\begin{array}{rcl} c_n & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t(1-in)}dt \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1-in)}dt \\ & & \text{(}2\pi\text{-périodicité)} \\ & = & \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{1-in}[e^{t(1-in)}]_{-\pi}^{\pi} \\ & = & \dfrac{1}{2\pi(1-in)}(e^{\pi}e^{-in\pi}-e^{-\pi}e^{in\pi}) \end{array} \tag{4}$$

mais $e^{in\pi} = \cos n\pi + i\underbrace{\sin n\pi}_{=0} = (-1)^n$ et $e^{-in\pi} = (-1)^n$, donc $c_n = \dfrac{1}{2\pi(1-in)}(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi}) = \dfrac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1-in)}$.

2. La fonction f est de classe C^1, donc la série de Fourier converge simplement vers la $f^*\colon x\mapsto \dfrac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. Or cette dernière fonction est $f^*(x)=e^x$ pour $x\in]-\pi,\pi[$, $f^*(x)=\cosh x$ si $x=\pi$ (rappel : $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$). Ainsi pour $x\in\mathbb{R}$, $f^*(x) = \dfrac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}$. Pour $x=0$, on obtient $\dfrac{\pi}{\sinh\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-in}$. Or $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-in} = -1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{1-in}+\dfrac{1}{1+in}) = -1+2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$. Par la suite $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1} = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{\pi}{\sinh\pi})$. De même avec $x=\pi$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{1}{2}(1+\pi\coth\pi)$ (rappel : $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$).

Exercice 6

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, définie par $f(x) = 4x^2 - \pi^2$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f(x) = 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2$ sinon.

1. Montrer que f est de classe C^1 et exprimer sa dérivée.
2. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Solution 6

1. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $f(x) = 4x^2 - \pi^2$ et donc f y est de classe C^1 avec $f_d'(0) = 0$ et $f_g'(\dfrac{\pi}{2}) = 4\pi$. Sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$, on a $f(x) = 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2$, et cette relation est aussi valable pour $x = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ avec $f_d'(\frac{\pi}{2}) = 4\pi$ et $f_g'(\pi) = 0$. Par parité et périodicité, on peut affirmer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et f' est une fonction impaire, 2π-périodique avec $f'(x) = 8x$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = 8\pi - 8x$ sinon.
2. Puisque la fonction f est paire, les coefficients b_n sont non nuls et $a_n = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ ce qui donne $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{32(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^3}$ après quelques calculs pénibles...
3. Puisque la fonction f est de classe C^1, elle est égale à la somme de sa série de Fourier et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{32}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} \cos((2n+1)x)$. En évaluant en $x = 0$, cela conduit à $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \dfrac{\pi^3}{32}$.