Transformée de Laplace

Exercice 1
L'objectif de cet exercice est de calculer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^\alpha \mathcal{U}(t)$ pour un réel $\alpha > -1$.

1. Considérons la fonction Gamma $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ pour un réel x tel que $x > 0$. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
4. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^\alpha \mathcal{U}(t)$ pour $\alpha > -1$ réel (en fonction de Γ). En déduire la transformée de Laplace de $t \mapsto t^n \mathcal{U}(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 1

1. La fonction $f\colon t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ où elle est positive. On observe que pour tout $t > 0$, on a $f(t) \leq t^{x-1}$. De plus $t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$. Par conséquent il existe $A > 0$ tel que $f(t) \leq \frac{A}{t^2}$ dès que $t \geq 1$. Alors, pour tout $c \in]0, 1[$ et tout $d \in]1, +\infty[$, on a
$$\begin{aligned} \int_c^d f(t)dt &\leq \int_c^1 t^{x-1}dt + \int_1^d \frac{A}{t^2}dt \\ &= \left[\frac{t^x}{x}\right]_c^1 + \left[-\frac{A}{t}\right]_1^d \\ &= \frac{1-c^x}{x} + A - \frac{A}{d} \\ &\leq \frac{1}{x} + A. \end{aligned} \tag{1}$$
L'intégrale $\int_c^d f$ est donc majorée quand $c \to 0$ et $d \to +\infty$. Comme la fonction f est positive, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f$ est donc convergente.
2. Une intégration par parties donne, pour $0 < c < d < +\infty$:
$$\begin{aligned} \int_c^d t^x e^{-t}dt &= \left[t^x(-e^{-t})\right]_c^d - \int_c^d (xt^{x-1})(-te^{-t})dt \\ &= \underbrace{c^x e^{-c}}_{\xrightarrow[c\to 0]{}0} - \underbrace{d^x e^{-d}}_{\xrightarrow[d\to+\infty]{}0} + x\int_c^d t^{x-1}e^{-t}dt. \end{aligned} \tag{2}$$
En faisant tendre c vers 0 et d vers $+\infty$, on obtient l'égalité requise.
3. Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^t dt = 1$, on obtient par récurrence : $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$ ou bien $\Gamma(n+1) = n!$.
4. Considérons $\alpha > 0$, $\Re(z) > 0$, et $F(z) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-zt}dt = \mathcal{L}(t^{\alpha-1}\mathcal{U}(t))$. Bien sûr $|t^{\alpha-1}e^{-zt}| = t^{\alpha-1}e^{-\Re(z)t}$, et donc l'intégrale est convergente. Pour $\alpha > -1$, posons $f(t) = t^\alpha \mathcal{U}(t)$. On a $F'(z) = -\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-zt}dt$ (par la règle de dérivation de la transformée de Laplace) $= [\frac{1}{z}t^\alpha e^{-tz}]_{t=0}^\infty - \frac{a}{z}\int_0^{=\infty} t^{\alpha-1}e^{-zt}dt = -\frac{\alpha}{z}F(z)$. Cela revient donc à $(z^\alpha F(z))' = 0$, soit encore $z^\alpha F(z)$ est une constante. Rappelons que $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$ où $\log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme. On a, en particulier, $1^\alpha = 1$ de sorte que $F(z) = \frac{F(1)}{z^\alpha}$. On a $F(1) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \Gamma(\alpha)$. Donc $F(z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha}$, soit $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{\Gamma(a+1)}{z^{\alpha+1}}$. Il s'ensuit que pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$.

Exercice 2
Déterminer par un calcul direct la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{\alpha t}\mathcal{U}(t)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

Solution 2
Tout d'abord f est causale. Elle est continue sur $[0; +\infty[$. Enfin elle est à croissance au plus exponentielle de façon évidente ($|f(t)| = |e^{\alpha t}| = |e^{(\Re(\alpha)+i\Im(\alpha))t}| = e^{\Re(\alpha)t}$). Son abscisse de convergence est inférieure ou égale à $\Re(\alpha)$. Calculons donc $\mathcal{L}(f)$ pour z tel que $\Re(z) > \Re(\alpha)$. On a $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{t(\alpha-z)}dt = \left[\frac{e^{t(\alpha-z)}}{\alpha - z}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = -\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{z-\alpha}$ pour tout z tel que $\Re(z) > \Re(\alpha)$. (Bien sûr $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-tz_0} = 0$ pour tout nombre complexe z_0 tel $\Re(z_0) > 0$, car $|e^{-tz_0}| = e^{-t\Re(z_0)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.)

Exercice 3
1. Déterminer la transformée de Laplace de $f_n\colon t \mapsto t^n\mathcal{U}(t)$ pour tout entier naturel n de deux façons : tout d'abord par un calcul direct et puis en utilisant une propriété de la transformée de Laplace.
2. En déduire la transformée de Laplace d'une fonction polynomiale (d'une variable réelle) $P\mathcal{U}\colon \mapsto P(t)\mathcal{U}(t)$ où $P\colon t \mapsto P(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout $0 \leq i \leq n$.
3. Calculer l'inverse de la transformée de Laplace de $z \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{z^i}$, $\beta_i \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$, avec $\beta_0 = 0$.

Solution 3
1. Les deux méthodes :
   (a) Première méthode : Pour $n = 0$, on a $f_0 = \mathcal{U}$ de sorte que $\mathcal{L}(f_0)(z) = \dfrac{1}{z}$ pour tout $\Re(z) > 0$ (voir cours). Soit $n > 0$. Soit $R > 0$. On a $\displaystyle\int_0^R t^n e^{-zt}dt = \left[\frac{-t^n e^{-tz}}{z}\right]_{t=0}^{t=R} + \int_0^R nt^{n-1}\frac{e^{-tz}}{z}dt$ (IPP avec $u' = e^{-tz}$ donc $u = -\dfrac{e^{-tz}}{z}$, et $v = t^n$ donc $v' = nt^{n-1}$) $= -\dfrac{R^n e^{-Rz}}{z} + \dfrac{n}{z}\displaystyle\int_0^R t^{n-1}e^{-tz}dt$. Raisonnons par récurrence sur la propriété que $a(f_n) \leq 0$ (c'est vrai pour $n = 0$). Supposons-la donc vraie pour $n-1$. Supposons que $\Re(z) > 0$. Donc $\mathcal{L}(f_{n-1})(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-tz}dt = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R t^{n-1}e^{-tz}dt$ pour tout $\Re(z) > 0$. Comme les applications $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -\dfrac{e^{-tz}}{z}$ sont toutes deux de classe C^1 et que $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{e^{-tz}t^n}{z}$ existe et vaut 0, on peut passer à la limite dans l'intégration par parties (qui est donc valide) et il en résulte donc que $\mathcal{L}(f_n)(z)$ est définie pour $\Re(z) > 0$ (de sorte que $a(f_n) \leq 0$) et vaut $\mathcal{L}(f_n)(z) = \dfrac{n}{z}\mathcal{L}(f_{n-1})(z)$. On voit donc que $(\mathcal{L}(f_n)(z))_n$ est solution de l'équation récurrente $u_0 = \dfrac{1}{z}$ et $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)}{z}u_n$ pour chaque z tel que $\Re(z) > 0$. On en déduit donc que $\mathcal{L}(f_n)(z) = \dfrac{n!}{z^{n+1}}$ (par une simple récurrence) pour tout z tel que $\Re(z) > 0$.

(b) Seconde méthode : La fonction f_n correspond à la fonction $M_n(\mathcal{U}) = t \mapsto t^n\mathcal{U}(t)$ vue en cours (cf. transparent "Dérivation de la transformée de Laplace"). D'après la proposition vue en cours on a $\mathcal{L}(f_n)(z) = (-1)^n(\mathcal{L}(\mathcal{U}))^{(n)}(z) = (-1)^n(z \mapsto \frac{1}{z})^{(n)}$ pour tout $\Re(z) > 0$. Donc $\mathcal{L}(f_0)(z) = \mathcal{L}(\mathcal{U})(z) = \frac{1}{z}$. Puis on démontre par récurrence sur n que $\mathcal{L}(f_n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$.

2. Par linéarité de la transformée de Laplace, on a (en utilisant les notations de l'exercice) pour tout z tel que $\Re(z) > 0$, $\mathcal{L}(P\mathcal{U})(z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathcal{L}(f_i)(z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{i!}{z^{i+1}}$ (compte tenu du début de l'exercice).

3. Soit $F\colon z \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{z^i}$ pour $\Re(z) > 0$. Donc $G(z) = \frac{1}{z}F(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{z^{i+1}}$ est défini pour $\Re(z) > 0$. D'après la première question, G est la transformée de Laplace de $g\colon t \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{i!} t^i \mathcal{U}(t)$. On cherche donc une fonction objet f telle que $\mathcal{L}(f)(z) = F(z)$ donc pour $\Re(z) > 0$ cela implique que $\frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z) = G(z) = \mathcal{L}(g)(z)$. On observe que $g(0) = \beta_0 = 0$ (par hypothèse). Donc g est la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire $g(t) = \int_0^t f(s)ds$. Il suffit donc de considérer $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{(i-1)!} t^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_{i+1}}{i!} t^i$ pour $t \geq 0$, et $= 0$ pour $t < 0$. D'après le cours, on en déduit que $\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}F(z)$, de sorte que $F = \mathcal{L}(f)$.
Autre méthode : $F(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{z^i} = \mathcal{L}(f)(z)$ pour une fonction objet f. Or $\frac{\beta_i}{z^i}$ est la transformée de Laplace de $t \mapsto \frac{\beta_i}{(i-1)!}t^{i-1}$ pour $i \geq 1$. Donc, $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{(i-1)!}t^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_{i+1}}{i!}t^i$.

Exercice 4
Trouver la fonction objet continue f dont la transformée de Laplace est

$$F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

avec $a \neq b$.

Solution 4
La décomposition en éléments simples de F nous donne $F(z) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right)$.
Bien sûr $\frac{1}{z-z_0} = \mathcal{L}(f_{z_0})(z)$ pour $f_{z_0}(t) = e^{tz_0}\mathcal{U}(t)$ ($\Re(z) > \Re(z_0)$) d'après la règle de modulation. Il en résulte donc que $F(z)$ est la transformée de Laplace de $f(t) = \frac{1}{b-a}(f_b(t) - f_a(t)) = \frac{1}{b-a}(e^{tb} - e^{ta})\mathcal{U}(t)$.

Autre méthode : comme ci-dessus posons $f_{z_0}(t) = e^{tz_0}\mathcal{U}(t)$. Alors, $\mathcal{L}(f)(z) = F(z) = \mathcal{L}(f_a * f_b)$, donc, pour $s \geq 0$, $f(s) = \int_0^s f_a(s-t)f_b(t)dt = e^{sa}\int_0^s e^{(b-a)t}dt = e^{sa}[\frac{e^{(b-a)t}}{b-a}]_0^s = \frac{1}{(b-a)}(e^{bs-as})$.

Exercice 5
Trouver la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\mathcal{U}(t)$.

Solution 5

Par linéarité on a $\mathcal{L}((3\cos 6t - 5\sin 6t)\mathcal{U}(t)) = 3\mathcal{L}(\cos 6t\ \mathcal{U}(t)) - 5\mathcal{L}(\sin 6t\ \mathcal{U}(t))$. On sait (vu en cours) que $\mathcal{L}(\sin t\ \mathcal{U}(t))(z) = \frac{1}{1+z^2}$ pour $\Re(z) > 0$. Par la règle de dilatation, on en déduit que $\mathcal{L}(\sin 6t\ \mathcal{U}(t))(z) = \frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{z^2}{36}} = \frac{1}{6}\frac{1}{\frac{36+z^2}{36}} = \frac{6}{36+z^2}$ pour tout $\Re(z) > 0$. Calculons maintenant $\mathcal{L}(\cos t\ \mathcal{U}(t))$. On sait que $\cos' t = -\sin t$ et comme $\lim_{t\to 0^+} \cos(t)\mathcal{U}(t) = \cos(0) = 1$. Donc d'après la règle de la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction on a $\mathcal{L}(\sin(t)\ \mathcal{U}(t))(z) = -\mathcal{L}(\cos'(t)\ \mathcal{U}(t))(z) = -z\mathcal{L}(\cos(t)\ \mathcal{U}(t))(z) + 1$ donc $\mathcal{L}(\cos(t)\ \mathcal{U}(t))(z) = \frac{-1}{z}(\mathcal{L}(\sin(t)\ \mathcal{U}(t))(z) - 1) = \frac{z}{1+z^2}$ (comme, par le même calcul que $a(\sin(t)\ \mathcal{U}(t))$, on a $a(\cos(t)\ \mathcal{U}(t)) = 0$, l'égalité est vraie pour tout $\Re(z) > 0$). En utilisant une nouvelle fois la règle de dilatation, on en déduit que $\mathcal{L}(\cos 6t\ \mathcal{U}(t))(z) = \frac{1}{6}\frac{\frac{z}{6}}{1+\frac{z^2}{36}} = \frac{z}{36+z^2}$ pour tout $\Re(z) > 0$. En combinant les résultats précédents, $\mathcal{L}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\mathcal{U}(t))(z) = \frac{3z-30}{36+z^2}$ pour tout $\Re(z) > 0$. Finalement, $\mathcal{L}(e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\mathcal{U}(t))(z)$ s'obtient par la règle de modulation qui donne $\frac{3z-24}{z^2+4z+40}$ pour tout $\Re(z) > -2$.

Exercice 6

Le problème consiste à trouver une solution $y = y(t)$ à l'équation différentielle $a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t)$ pour $t > 0$ et avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, où a_0, a_1, a_2, y_0, y_1 sont des constantes réelles, $a_2 \neq 0$ et $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est donnée (on suppose en fait que $f \equiv 0$ pour tout $t < 0$).

1. Appliquer la transformée de Laplace sur l'équation différentielle (on suppose que les hypothèses d'existence des transformées de Laplace sont satisfaites).
2. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $f(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$, $y_0 = y_1 = 1$.

Solution 6

1. Notons $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$ et $Y(z) = \mathcal{L}(y)(z)$. On a $\mathcal{L}(y'')(z) = z^2\mathcal{L}(y)(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) - zy_0 - y_1$ et $\mathcal{L}(y')(z) = z\mathcal{L}(y)(z) - y(0) = zY(z) - y_0$. On a donc $\mathcal{L}(a_2y'' + a_1y' + a_0y)(z) = a_2(z^2Y(z) - zy_0 - y_1) + a_1(zY(z) - y_0) + a_0Y(z) = F(z)$, soit
$$Y(z) = \frac{F(z) + a_2y_0z + a_2y_1 + a_1y_0}{a_2z^2 + a_1z + a_0}.$$
2. Dans ce cas particulier, $F(z) = \frac{1}{z^2+1}$ de sorte que $Y(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} + \frac{z+1}{z^2+1}$. On retrouve facilement que $\frac{z}{z^2+1}$ est la transformée de Laplace de $\cos(t)$ et $\frac{1}{z^2+1}$ est celle de $\sin(t)$. Il nous reste donc à inverser $\frac{1}{(z^2+1)^2}$. On remarque que la dérivée de $\frac{1}{z^2+1}$ est $\frac{-2z}{(z^2+1)^2}$. Donc $\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{-2z}\ \mathcal{L}(\sin)'(z) = \frac{1}{2z}\mathcal{L}(t\sin(t))(z)$ (par la règle de dérivation de la transformée de Laplace), soit encore $\mathcal{L}(t\sin(t))(z) = \frac{2z}{(1+z^2)^2}$. Or $t\sin(t)$ est la dérivée de la fonction $h(t) = -t\cos(t) + \sin(t)$ qui satisfait $\lim_{t\to 0^+} h(t) = 0$. On a donc (par la règle de la transformée de Laplace d'une dérivée) $\mathcal{L}(t\sin(t))(z) = \mathcal{L}(h')(z) = z\mathcal{L}(h)(z) - h(0^+) = z\mathcal{L}(h)(z)$. Il en résulte

donc que $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ est la transformée de Laplace de $\frac{1}{2}h(t) = -\frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$.

Finalement $Y(z)$ est la transformée de Laplace de $\dfrac{3}{2}\sin(t) + \cos(t) - \dfrac{1}{2}t\cos(t)$.

Exercice 7
À l'aide d'intégrations par parties, déterminer la transformée de Laplace de $f_n(t) = \cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la transformée de Laplace inverse de $F(z) = \dfrac{4z}{z^2+64}$.

Solution 7
Pour $\Re(z) > 0$, on a par définition $\mathcal{L}(f_n)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(nt)e^{-zt}dt = \left[\frac{\cos(nt)e^{-zt}}{-z}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \frac{n}{z}\int_0^{+\infty} \sin(nt)e^{-zt}dt = \frac{1}{z} - \frac{n}{z}\left(\left[\frac{\sin(nt)e^{-zt}}{-z}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \frac{n}{z}\int_0^{+\infty}\cos(nt)e^{-zt}dt\right) = \frac{1}{z} - \frac{n^2}{z^2}\mathcal{L}(f_n)(z)$.
Cela conduit alors à $\mathcal{L}(f_n)(z) = \dfrac{z}{z^2+n^2}$. On en déduit donc facilement que $F(z)$ est la transformée de Laplace de $4f_8$.

Exercice 8
Soient $T > 0$ et f une fonction T-périodique telle que $g\colon t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$ soit une fonction objet. Définissons $\phi(t) = f(t)(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-T))$ de sorte que $\phi(t) = f(t)$ pour $0 \leq t < T$ et $\phi(t) = 0$ sinon (i.e., pour $t \in]-\infty; 0[\cup[T; +\infty[$). Calculer $\mathcal{L}(g)$ en fonction de $\mathcal{L}(\phi)$. En déduire la transformée de Laplace de la fonction g associée à la fonction périodique f de période 1 telle que $f(t) = t$ pour $t \in [0; 1]$.

Solution 8
Comme f est T-périodique, $\phi(t) = f(t)\mathcal{U}(t) - f(t)\mathcal{U}(t-T) = f(t)\mathcal{U}(t) - f(t-T)\mathcal{U}(t-T)$ (car $f(t) = f(t-T+T) = f(t-T)$). On a donc $\mathcal{L}(\phi)(z) = \mathcal{L}(g)(z) - e^{-Tz}\mathcal{L}(g)(z)$ pour tout z tel que $\Re(z) > a(g)$ (par la règle de translation). De sorte que $\mathcal{L}(g)(z) = \dfrac{1}{1-e^{-Tz}}\mathcal{L}(\phi)(z)$ pour tout z tel que $\Re(z) > \max\{\,0, a(g)\,\}$.

On a $\phi(t) = t$ pour $t \in [0; 1[$ et $\phi(t) = 0$ sinon. Sa transformée de Laplace est $\mathcal{L}(\phi)(z) = \displaystyle\int_0^1 te^{-tz}dt = \left[-\frac{te^{-tz}}{z}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{e^{-tz}}{z}dt = -\frac{e^{-z}}{z} + \left[\frac{-e^{-tz}}{z^2}\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{e^{-z}}{z} + \frac{1-e^{-z}}{z^2}$. D'où $\mathcal{L}(g)(z) = \dfrac{1}{1-e^{-z}}\left(-\dfrac{e^{-z}}{z} + \dfrac{1-e^{-z}}{z^2}\right)$.

Exercice 9
Soient a et b deux nombres réels tels que $b < 0$. Calculer la transformée de Laplace inverse de $F(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z^2-b)}$. (Écrire $F(z)$ sous la forme $\dfrac{c}{z-a} + \dfrac{dz+e}{z^2-b}$ puis utiliser les transformées de Laplace de $\mathcal{U}$ et de sin.)

Solution 9
Décomposons $F(z)$ en éléments simples $F(z) = \dfrac{c}{z-a} + \dfrac{dz+e}{z^2-b}$. On trouve $c = \dfrac{1}{a^2-b}$, $d = \dfrac{1}{b-a^2}$ et $e = \dfrac{a}{b-a^2}$, c'est-à-dire $F(z) = \dfrac{1}{a^2-b}\left(\dfrac{1}{z-a} - \dfrac{z+a}{z^2-b}\right)$. (On remarque que $a^2 - b \neq 0$ puisque $b < 0$). La transformée de Laplace de $\mathcal{U}$ est $\mathcal{L}(\mathcal{U})(z) = \dfrac{1}{z}$ pour $\Re(z) > 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{z-a} = \mathcal{L}(\mathcal{U})(z-a) = \mathcal{L}(e^{at}\mathcal{U}(t))(z)$ pour $\Re(z) > \Re(a)$ (modulation).

La transformée de Laplace de $\sin(t)\,\mathcal{U}(t)$ est $G(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ pour $\Re(z) > 0$, donc $\dfrac{a}{z^2-b} = \dfrac{a}{|b|}\,\dfrac{1}{(\frac{z}{\sqrt{|b|}})^2+1} = \dfrac{a}{\sqrt{|b|}}\,\dfrac{1}{\sqrt{|b|}}G(\frac{z}{\sqrt{|b|}})$ de sorte que par la règle de dilatation il s'agit de la transformée de Laplace de $g(t) = \dfrac{a}{\sqrt{|b|}}\,\sin(\sqrt{|b|}t)\mathcal{U}(\sqrt{|b|}t) = \dfrac{a}{\sqrt{|b|}}\,\sin(\sqrt{|b|}t)\mathcal{U}(t)$. Puis $\dfrac{z}{z^2-b} = \dfrac{z}{\sqrt{|b|}}\,\dfrac{1}{\sqrt{|b|}}G(\frac{z}{\sqrt{|b|}}) = z\mathcal{L}(h)(z)$ pour $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{|b|}}\,\sin(\sqrt{|b|}t)\mathcal{U}(\sqrt{|b|}t) = \dfrac{1}{\sqrt{|b|}}\,\sin(\sqrt{|b|}t)\mathcal{U}(t)$. Comme $\lim_{t\to 0^+}\sin(\sqrt{|b|}t)\mathcal{U}(t) = 0$, on en déduit, d'après la règle de la transformée de Laplace de la dérivation, que $\dfrac{z}{z^2-b}$ est la transformée de Laplace de $h'(t) = \cos(\sqrt{|b|}t)\mathcal{U}(t)$. Finalement, $F(z)$ est la transformée de Laplace de $\dfrac{1}{a^2-b}\left(e^a t - \cos(\sqrt{|b|t}) - \dfrac{a}{\sqrt{|b|}}\sin(\sqrt{|b|t})\right)\mathcal{U}(t)$.