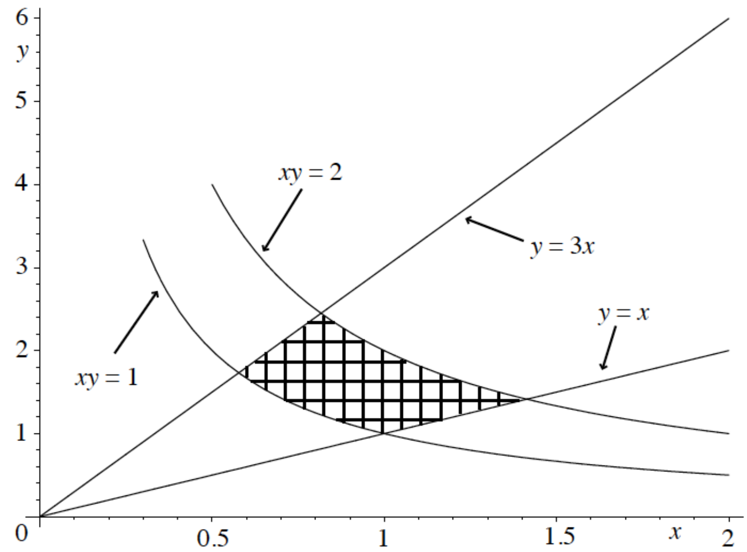
EA1 - Outils Mathématiques — Année 2015-2016
Chapitre 5 - Travaux Dirigés

Intégrales multiples

Exercice 1

Considérons le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ constitué des points (x, y) tels que $1 \leq xy \leq 4$ et $x \leq y \leq 3x$, soit $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x, y,\ 1 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 3 \}$, comme illustré dans la figure suivante.



L'objectif est ici d'évaluer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$.

1. Considérons le changement de variables $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$. Quelle est l'image R de D par ce changement de variable ?
2. Évaluer le jacobien de ce changement de variables.
3. Calculer l'intégrale double à l'aide du changement de variables.

Exercice 2

1. Calculer la longueur du cercle unité (en utilisant une intégrale curviligne).
2. Calculer $\int_\Gamma f d\ell$ quand $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ et $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2y = x^2,\ x \in [0, 1] \}$
3. Calculer $\int_\Gamma f \cdot d\ell$ quand $f(x, y) = (x^2, 0)$ et $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \cosh x,\ x \in [0, 1] \}$.

Exercice 3

Calculer $\int_{\Gamma_i} f \cdot d\ell$ quand $f(x, y) = (xy, y^2 - x)$ et $\Gamma_1 = \{ (t, t) \colon 0 \leq t \leq 1 \}$, $\Gamma_2 = \{ (t, e^t) \colon 0 \leq t \leq 1 \}$ et $\Gamma_3 = \{ (\sqrt{t}, t^2) \colon 1 \leq t \leq 2 \}$

Exercice 4

Soient $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1 \}$ et $f(x, y) = (y^2, x)$. Vérifier le théorème de Green.

Exercice 5

Vérifier le théorème de Green pour $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1 \}$ et $f(x, y) = (xy, y^2)$.

Exercice 6
Calculer l'aire de $\Sigma = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = R^2 \,\}$.

Exercice 7
Calculer $\iint_\Sigma f ds$ où $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ et $\Sigma = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1 \,\}$.