Résidus et applications

Quelques notions à savoir avant la correction

1. Soit f une fonction holomorphe en z_0. Alors son développement de Taylor coïncide avec son développement de Laurent en z_0. Donc $Res(f, z_0) = 0$.
2. Soient U un ouvert, $z_0 \in U$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction qui est holomorphe dans $U \setminus \{ z_0 \}$. Soit $g\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Supposons que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in U \setminus \{ z_0 \}$. Alors z_0 est une fausse singularité de f (et donc $Res(f, z_0) = 0$). En effet, g, holomorphe, admet un développement en série de Taylor, en tout $z \in U$, donc notamment en z_0 : $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$. Ce développement correspond donc au développement en série de Laurent de f en z_0 (par unicité), qui ne comporte pas de partie principale. Ce cas s'applique par exemple à la fonction $f(z) = \dfrac{(z-z_0)^d}{(z-z_0)^e Q(z)}$ où $0 < e \leq d$ et Q est un polynôme ne s'annulant pas en z_0.
3. Soit $f(z) = \dfrac{P(z)}{(z-z_0)^d Q(z)}$ avec P, Q deux polynômes ne s'annulant pas en z_0. En particulier $\dfrac{P}{Q}$ est holomorphe en z_0, donc admet un développement de Taylor en z_0, de sorte que $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^d} \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = \dfrac{a_0}{(z-z_0)^d} + \sum_{n\geq 1} a_n(z-z_0)^{n-d}$ et $a_0 = \dfrac{P(z_0)}{Q(z_0)} \neq 0$. Donc z_0 est un pôle d'ordre d.

Exercice 1

Il s'agit de trouver la série de Laurent de f en précisant la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence.

1. $\sin z$ en $z_0 = \pi/4$.
2. $\dfrac{\sin z}{z^3}$ en $z_0 = 0$.
3. $\sin \frac{1}{z}$ en $z_0 = 0$.
4. $\dfrac{z^2+2z+1}{z+1}$ en $z_0 = -1$.
5. $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ en $z_0 = 1$.

Solution 1

1. La fonction sin est holomorphe en $\pi/4$. Son développement en série de Laurent se confond donc avec son développement de Taylor en $\pi/4$. (Remarquons d'emblée que la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{4})^{2^n+1}$ n'est pas la série de Taylor de sin en $\frac{\pi}{4}$ puisque cette série converge vers $\sin(z-\frac{\pi}{4})$.) Il en résulte que $Res(f, \pi/4) = 0$ et que $sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin^{(n)}(\pi/4)(z-\pi/4)^n$. Or on a $\sin'(z) = \cos(z)$ et $\cos'(z) = -\sin(z)$. Comme $\sin(\pi/4) = \sin'(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et que $\sin''(\pi/4) = \sin'''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, il en résulte que $\sin(z) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha_n}{n!}(z-\pi/4)^n$, avec $\alpha_{4n} = \alpha_{4n+1} = -\alpha_{4n+2} = -\alpha_{4n+3} = 1$. La série de Taylor converge vers $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Une autre façon de procéder : $\sin(z) = \sin(z-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \sin(z-\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(z-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(z-\frac{\pi}{4}) + \cos(z-\frac{\pi}{4})) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{2n+1}(z-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{2n}(z-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda_n}{n!}(z-\frac{\pi}{4})^n$.

2. On sait que $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ de sorte que $\dfrac{sinz}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} = \dfrac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} z^{2n}$. Donc 0 est un pôle double, et $Res(f, 0) = 0$. La série converge pour tout $z \neq 0$.
3. On développe $\sin y$ en série de Taylor et on pose $y = \frac{1}{z}$ pour obtenir

$$\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} \Rightarrow \sin(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

   On trouve alors que 0 est une singularité essentielle et $Res(f, 0) = 1$. La convergence a lieu pour tout $z \neq 0$.
4. $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 1}{z+1} = (z+1)^2/(z+1)$, donc $z_0 = -1$ est une fausse singularité. Par conséquent $Res(f, 0) = 0$. Le développement de Taylor en $z_0 = -1$ est donc trivialement $z + 1$. La convergence a lieu sur $\mathbb{C}$ tout entier.
5. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^3} = \dfrac{-1}{(z-1)^3}$ est le développement de Laurent de f en $z_0 = 1$. Il en résulte que z_0 est un pôle triple, et $Res(f, 1) = 0$. La convergence a lieu pour peu que $z \neq 1$.

Exercice 2
Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a\cos(t) + 1}$$

où a est un paramètre réel qui ne prend pas les valeurs ± 1.

Solution 2
Le cas où $a = 0$ est immédiat :

$$I(0) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Supposons donc $a \neq 0$. Considérons $R(x, y) = \dfrac{1}{a^2 - 2x + 1}$. On remarque que le dénominateur de R n'a pas de zéro sur le cercle unité (en effet, $R(\cos t, \sin t) = 0$ si, et seulement si, $\cos t = \frac{a^2+1}{2}$. Or $|\cos t| = 1 = \frac{a^2+1}{2}$, soit $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$, ce qui exclu par hypothèse). La méthode vue en cours conduit à l'expression

$$I(a) = \int_\gamma \frac{1}{iz} \frac{dz}{(a^2 - a(z + 1/z) + 1)}$$

où $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. On a (pour $z \neq 0$) $a^2 - a(z + 1/z) + 1 = (a - z)(a - 1/z) = 1/z(a - z)(az - 1)$ de sorte que

$$I(a) = \int_\gamma \frac{idz}{(z-a)(az-1)} = \int_\gamma f(z)dz.$$

Il y a deux pôles simples $z = a$ et $z = 1/a$ (rappelons que par hypothèse $a \neq \pm 1$), mais aussi la singularité $z = 0$. Celle-ci est une fausse singularité (puisque $f(z) = \dfrac{i}{(z-a)(az-1)}$ et le membre de droite est holomorphe en 0) donc $Res(f, 0) = 0$. Il y a deux cas à considérer : soit $|a| > 1$, soit $|a| < 1$. Supposons tout d'abord que $|a| > 1$. On a donc $I(a) = 2i\pi Res(f, 1/a)$. Or $Res(f, 1/a) = \dfrac{i}{Q'(1/a)} = \dfrac{i}{1-a^2}$ où $Q(z) = (z-a)(az-1)$ (en effet, $Q(z) = az^2 - (a^2+1)z + a$ donc $Q'(z) = 2az$ et il s'ensuit que $Q'(\frac{1}{a}) = 2 - a^2 - 1 = 1 - a^2$ et $Q'(a) = 2a^2 - a^2 - 1 = a^2 - 1$). Ainsi $I(a) = 2i\pi \dfrac{i}{1-a^2} = \dfrac{2\pi}{a^2-1}$. Pour $|a| < 1$, on trouve de façon similaire : $I(a) = \dfrac{2\pi}{1-a^2}$ (on remarque que ce résultat reste vrai si $a = 0$).

Exercice 3
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}dx.$

Solution 3
On a $x^4 + 16 = (x^2 - 4i)(x^2 + 4i)$. Donc $x^4 + 16$ n'admet pas de racines réelles. Comme par ailleurs $\deg(16 + x^4) = 4 = \deg(x^2) + 2$, on peut appliquer la méthode vue en cours et affirmer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}dx = 2i\pi \sum_{a\in E} Res(F, a)$ où $F(z) = z^2/(16 + z^4)$ et E est l'ensemble des pôles de F dans le demi-plan supérieur.

Les pôles sont les zéros de $16 + z^4$. On a $z^4 = -16 = (2\omega)^4$ où ω est une racine quatrième de -1 (i.e., $\omega^4 = -1$), soit $\omega = e^{i(2k+1)\pi/4}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. (Rappelons que pour $n \geq 1$, et $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \neq 0$, on a $z^n = z_0$ si, et seulement si, $r^n = r_0$ et $n\theta = \theta_0 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, où on a posé $z = re^{i\theta}$, de sorte que r est l'unique racine n-ème réelle positive de r_0 et $\theta = \theta_0/n + k2\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$ ou encore modulo 2π, $\theta = \theta_0/n + k2\pi/n$, $k = 0, \cdots, n-1$.)

On a donc comme pôles $z_1 = 2e^{i\pi/4}$, $z_2 = 2e^{i3\pi/4}$, $z_3 = 2e^{i5\pi/4}$ et $z_4 = 2e^{i7\pi/4}$. Ce sont donc des pôles simples et seuls z_1, z_2 appartiennent au demi-plan supérieur. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}dx = 2i\pi(Res(F, z_1) + Res(F, z_2))$. Enfin, $Res(F, z_1) = \dfrac{z_1^2}{4z_1^3} = \dfrac{1}{4z_1} = \frac{1}{8}e^{-i\pi/4}$ et $Res(F, z_2) = \dfrac{1}{4z_2} = \frac{1}{8}e^{-3i\pi/4}$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}dx = \frac{1}{4}i\pi(e^{-i\pi/4} + e^{-3i\pi/4}) = \frac{1}{4}i\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i - 1 - i)) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$. (En effet, si z_0 est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, alors $Res(F, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0}$.) (Et rappelons aussi que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.)

Exercice 4
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$ en fonction de $\omega \in \mathbb{R}$, où $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.

Solution 4
Bien sûr $z \mapsto f(z)$ n'admet pas de pôle sur l'axe des réels. Elle a un pôle simple i dans le demi-plan supérieur et un pôle simple $-i$ dans le demi-plan inférieur. Par ailleurs on a $f = \dfrac{P}{Q}$ avec $\deg Q = 2 \geq \underbrace{\deg P}_{=0} + 2$. Il en résulte, d'après ce que l'on a vu en cours, que pour $\omega > 0$, $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\omega x}dx = 2i\pi Res(f(z)e^{i\omega z}, i) = \pi e^{-\omega}$. (En effet, $Res(f(z)e^{i\omega z}, i) = \frac{e^{i\omega i}}{2i}$.) Pour $\omega < 0$, on a $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\omega x}dx = -2i\pi Res(f(z)e^{i\omega z}, -i) = \pi e^{\omega}$. Pour $\omega = 0$, on a $f = \dfrac{P}{Q}$ avec $\deg Q = 2 \geq \underbrace{\deg P}_{=0} + 2$, f n'a pas de pôle réel, de sorte que $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2i\pi Res(f(z), i) = \pi$. Il en résulte que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx = \pi e^{-|\omega|}$.

Exercice 5
Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4}dx.$

Solution 5
On introduit la fonction rationnelle $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{z^3}{z^4 + 5z^2 + 4}$. Le dénominateur admet i et $-i$ comme racines. La division par $z^2 + 1$ mène à $z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$. Elle n'a donc pas de pôle réel, et $\deg Q = 1 + \deg P$. Par raison de parité on a

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

(le membre de droite est en fait la partie imaginaire de la valeur principale $\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x) e^{ix} dx$) qui n'est autre que la partie imaginaire de

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

On peut appliquer la méthode vue en cours de sorte que $J = i\pi(Res(f(z)e^{iz}, i) + Res(f(z)e^{iz}, 2i)) = i\pi(\left[\dfrac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z}\right]_{z=i} + \left[\dfrac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z}\right]_{z=2i}) = i\pi(\dfrac{2}{3e^2} - \dfrac{1}{6e})$. Ainsi $I = \Im(J) = \pi(\dfrac{2}{3e^2} - \dfrac{1}{6e})$.