Intégrales curvilignes et primitives

Exercice 1
Soient $f(z) = z^2$, et γ_1, γ_2 respectivement le demi-cercle supérieur de rayon 1 centré en l'origine et γ_2 le cercle de rayon 1 centré en l'origine, tous deux parcourus dans le sens trigonométrique. Calculer $\int_{\gamma_i} f(z)dz$, $i = 1, 2$. En déduire $\int_{\gamma_3} f(z)dz$ où γ_3 est le demi-cercle inférieur de rayon 1 centré en l'origine parcouru dans le sens direct.

Solution 1
$\gamma_1 \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma_1(\theta) = e^{i\theta}$. Donc $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$. Il en résulte que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = i\int_0^\pi e^{3i\theta}d\theta = \frac{e^{3i\pi}}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

La fonction $f \colon z \mapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, et y admet une primitive $F(z) = \frac{1}{3}z^3$, donc pour tout circuit γ (et en particulier pour γ_2), $\int_\gamma f(z)dz = 0$. On a enfin $0 = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1 * \gamma_3} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$ donc $\int_{\gamma_3} f(z)dz = \frac{2}{3}$.

Exercice 2
Soit γ un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Discuter en fonction du cercle la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z}dz.$$

Solution 2
On observe que $f(z) = \cos(2z)/z$ n'est pas défini en $z = 0$ (on parle de singularité ; cf. chap. IV) et est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$. On va distinguer plusieurs cas.

– Si 0 est à l'intérieur du disque fermé D dont γ est le bord ∂D, alors on applique la seconde formule de Cauchy à $g(z) = \cos(2z)$ et on trouve

$$1 = g(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z - 0}dz$$

et par conséquent

$$\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z}dz = 2i\pi.$$

– Si 0 n'appartient pas à D, alors $f(z) = \cos(2z)/z$ est holomorphe dans l'intérieur de D. On a donc (par la première formule de Cauchy)

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz = 0\ .$$

– Si $0 \in \partial D$, alors l'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 3
Soit $\gamma = 2 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}dz.$$

Solution 3
Soient $f(z) = e^{z+2}$, $z = 2$ et $n = 2$. D'après la formule de Cauchy on a

$$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz = \frac{2i\pi}{2} e^4 = i\pi e^4.$$

Exercice 4
Soit $\gamma = \pi/2 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{z^2 \sin z}{(z-\pi/2)^2} dz.$$

Solution 4
On applique la formule de Cauchy à $f(z) = z^2 \sin z$, $z = \pi/2$ et $n = 1$ (noter que $f'(z) = 2z \sin z + z^2 \cos z$). On trouve donc que

$$\int_\gamma \frac{z^2 \sin z}{(z-\pi/2)^2} dz = \frac{2i\pi}{1!} f'(\pi/2) = 2i\pi^2.$$

Exercice 5
Calculer

1. $\int_\gamma (z^2+1) dz$, où γ parcourt une fois le segment $[1, 1+i]$ de 1 vers $1+i$.
2. $\int_\gamma \Re(z^2) dz$, où γ parcourt une fois le cercle unité.
3. $\int_\gamma \Re(z^2) dz$, où γ parcourt le segment horizontal de i à $i+1$ une fois.

Solution 5

1. Par indépendance à la paramétrisation, on peut choisir $\gamma(t) = 1 + it$, $t \in [0, 1]$. On trouve donc

$$\int_\gamma (z^2+1) dz = \int_0^1 ((it+1)^2+1) i dt = i \int_0^1 (-t^2 + 2it + 2) dt = \frac{5i}{3} - 1.$$

   Une autre solution : $F(z) = \frac{z^3}{3} + z$ est une primitive de $f(z) = z^2 + 1$. Donc $\int_\gamma f(z) dz = F(1+i) - F(1) = \frac{5i}{3} - 1$.

2. On paramètre le cercle avec $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. On trouve alors $\int_\gamma \Re(z^2) dz = \int_0^{2\pi} \Re(e^{2it}) i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} \cos 2t (\cos t + i \sin t) dt$. Calculons tout d'abord $\int_0^{2\pi} \cos 2t \cos t dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos 2t \cos t \; dt &= \int_0^{2\pi} 2\cos^3 t \; dt - \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \\
&\quad \text{(puisque } \cos 2t = \cos^2 t - 1\text{)} \\
&= \frac{2}{4} \int_0^{2\pi} (\cos 3t + 3\cos t) dt - \underbrace{[\sin t]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&\quad \text{(par linéarisation : } \cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}\text{)} \\
&= \frac{1}{2} ([\tfrac{1}{3} \sin 3t]_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} \cos t \; dt) \\
&= 0 \; .
\end{aligned} \tag{1}$$

Calculons ensuite $\int_0^{2\pi} \cos 2t \sin t \; dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos 2t \sin t \; dt &= \int_0^{2\pi} \sin t \; dt - 2\int_0^{2\pi} \sin^3 t \; dt \\
&\quad (\text{puisque } \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t) \\
&= \underbrace{[-\cos t]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{2}{4}\int_0^{2\pi} (\sin 3t - 3\sin t) dt \\
&\quad (\text{par linéarisation : } \sin^3 t = \frac{-\sin 3t + 3\sin t}{4}) \qquad (2) \\
&= \frac{1}{2}([-\tfrac{1}{3}\cos(3t)]_0^{2\pi} + 3[-\cos t]_0^{2\pi}) \\
&= 0 \; .
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\int_\gamma \Re(z^2) dz = 0$.

3. On paramètre le segment par $\gamma(t) = t + i$, $t \in [0,1]$. Donc $\Re(\gamma(t)^2) = t^2 - 1$ et $\gamma'(t) = 1$ donc $\int_\gamma \Re(z)^2 dz = \int_0^1 (t^2 - 1) dt = [\frac{t^3}{3} - t]_0^1 = -2/3$.

Exercice 6

Déterminer la valeur des intégrales :

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2 + 2z + \sin(z+1)}{(z-2)^2} dz$ où γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle $|z-2| = 1$.
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)} dz$ et γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle $|z| = 1$.

Solution 6

1. Soient $f(z) = 3z^2 + 2z + \sin(z+1)$, $z = 2$ et $n = 1$. On trouve que $f'(z) = 6z + 2 + \cos(z+1)$. La formule intégrale de Cauchy donne donc
$$\int_\gamma \frac{3z^2 + 2z + \sin(z+1)}{(z-2)^2} dz = 2i\pi f'(2) = 2i\pi(14 + \cos 3).$$
2. On va considérer dans ce cas la fonction $f(z) = e^z/(z+2)$ qui est holomorphe dans le $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ et 0 appartient au disque ouvert centré en 0 et de rayon 1. On a ainsi
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)} dz = 2i\pi f(0) = 2i\pi \frac{1}{2} = i\pi.$$
Une autre solution : la décomposition en éléments simples nous donne $\frac{e^z}{z(z+2)} = \frac{1}{2}(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2})$. On doit donc calculer $\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^z}{z+2} dz$. La fonction $\frac{e^z}{z+2}$ est holomorphe dans le disque unité, donc la seconde intégrale vaut 0 (par la première formule de Cauchy). Calculons donc $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$. Il suffit d'appliquer la seconde formule de Cauchy (car $z = 0$ est dans le cercle unité), laquelle nous donne $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = 2i\pi e^0 = 2i\pi$. Il en résulte que $\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)} dz = \frac{1}{2} 2i\pi = i\pi$.

Exercice 7

Calculer
$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)} dz$$
dans les cas suivants

1. γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle de centre 1 et de rayon 1.
2. γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle de centre $2i$ et de rayon 1.

Solution 7

1. Soit $f(z) = e^{z^2}/(z^2+4)$. Cette fonction est holomorphe dans l'intérieur du disque centré en 1 et de rayon 1, et 1 appartient à ce disque. La formule de Cauchy donne donc
$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2i\pi f'(1).$$
On trouve
$$f'(z) = \frac{2ze^{z^2}(z^2+4) - 2ze^{z^2}}{(z^2+4)}$$
et ainsi $f'(1) = 8e/25$. On a par conséquent
$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = i\frac{16e\pi}{25}.$$

2. On considère dans ce cas $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z+2i)}$ qui est holomorphe dans l'intérieur du disque et $2i$ appartient à l'intérieur du disque (c'est son centre). Par la formule de Cauchy on obtient
$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-2i)}dz = 2i\pi f(2i) = \frac{-\pi e^{-4}}{2(3+4i)}.$$