Outils Mathématiques - Chapitre II : Fonctions analytiques et exemples classiques

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

Plan du cours

Table des matières

On s'intéresse à la somme (si elle existe) d'une série de fonctions de terme général $z \mapsto a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$.

Sans se poser la question de la convergence, notons-la

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ .$$

Une telle série est appelée une série entière.

Bien sûr on s'intéresse aux conditions sous lesquelles cette série converge. Définissons pour cela R par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

où on rappelle que

$$\limsup_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} t_k \ .$$

Clairement, $R \in [0, +\infty]$ (on pose par convention $R = +\infty$, lorsque $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$) et s'appelle le rayon de convergence de la série entière.

En fait $R = \sup\{\, r \geq 0 \colon (|a_n| r^n)_n \text{ est borné} \,\}$.

Rappels

Rappelons un critère de convergence qui sera parfois utile, à savoir la règle de d'Alembert.

Soit $(x_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. Supposons que la limite suivante existe

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} .$$

Alors

1. Si $\ell < 1$, la suite $(x_n)_n$ converge vers 0 et la série de terme général x_n est convergente.
2. Si $\ell > 1$, la suite $(x_n)_n$ ne tend pas vers 0 (et la série de terme général x_n diverge grossièrement).

La règle de d'Alembert peut donc être utilisée pour prouver la convergence absolue d'une série à termes complexes ou réels.

Remarque

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une série entière, alors son rayon de convergence est $\frac{1}{\ell}$, où $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Proposition

Supposons R donné comme on vient de voir.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument. On dit que $D(0; R)$ est le disque de convergence de la série.
2. La convergence de la série de fonctions est normale sur tout disque fermé $\overline{D}(0; r)$ pour $r < R$. En d'autres termes, pour tout $r < R$, $\sum_{n \geq 0} \|a_n z^n\|_\infty$ converge, où $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \overline{D}(0;r)} |f(z)|$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série numérique diverge grossièrement (i.e., le terme général ne tend pas vers 0).

Exemple : La série géométrique

Pour la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, on a immédiatement $R = 1$.

L'étude directe de la convergence est également très intéressante. Pour tout $z \neq 1$ on a

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \ .$$

Si $|z| \geq 1$, alors z^n ne tend pas vers 0 et la série diverge. En particulier il y a divergence en tout point du cercle $|z| = 1$.

Pour $|z| < 1$, le passage à la limite mène à l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \ .$$

Exemple (série de Riemann)

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Soit $u_n = \frac{z^n}{n^2}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}|z| = |z| \ .$$

Il s'ensuit que

- Si $|z| < 1$, alors on obtient la convergence absolue.
- Si $|z| > 1$, alors la série diverge.

Ceci est suffisant pour affirmer que $R = 1$. De plus, pour $|z| \leq 1$ on a $\frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (de somme $\pi^2/6$) est ainsi une série majorante sur tout le disque fermé $\overline{D}(0;1)$. En particulier, il y a ici convergence absolue en tout point du cercle de convergence $|z| = 1$.

Exemple (série harmonique)

Considérons la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

La règle de d'Alembert nous donne $R = 1$.

Pour $z = 1$ on a la série harmonique divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

La série exponentielle

Considérons la série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \ .$$

Donc la série est absolument convergente pour tout z et $R = +\infty$.

Considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$.

On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|z| \ .$$

Cette limite vaut $+\infty$ sauf pour $z = 0$. D'où $R = 0$.

Table des matières

Somme et produit

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_A et R_B, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Posons $S_n = a_n + b_n$, $E_n = \lambda a_n$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Notons R_S, R_E et R_P les rayons de convergence respectivement de $\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$.

1. $R_S \geq \min\{ R_A, R_B \}$ (avec égalité lorsque $R_A \neq R_B$), et pour tout $|z| < \min\{ R_A, R_B \}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.
2. $R_E = +\infty$ si $\lambda = 0$, et $R_E = R_A$ si $\lambda \neq 0$, et pour tout $|z| < R_A$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n = \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)$.
3. $R_P \geq \min\{ R_A, R_B \}$, et pour tout $|z| < \min\{ R_A, R_B \}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$.

Substitution

Étant données deux séries entières $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ telle que $B(0) = 0$, toutes deux de rayon de convergence non nul,

on définit

$$A(B(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B(z)^n \ .$$

Alors le rayon de convergence de $A(B(z))$ est non nul. Plus précisément : Soit R_A le rayon de convergence de A.

1. Il existe des réels $r > 0$ pour lesquels $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| r^n < R_A$.
2. Si r est ainsi choisi, alors le rayon de convergence de la série entière $A(B(z))$ lui est supérieur ou égal, et pour tout $|z| \leq r$, $|B(z)| < R_A$.

Dérivation

Les séries entières procurent des exemples de fonctions holomorphes, ce qui justifie leur étude dans le cadre de ce cours. En effet nous avons le résultat suivant :

Proposition

Soient une série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et la série (dite dérivée)

$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

1. Les deux séries ont le même rayon de convergence (disons R).
2. Les fonctions $S\colon z \mapsto S(z)$ et $D\colon z \mapsto D(z)$ sont holomorphes dans $D(0;R)$, et

$$S'(z) = D(z)$$

pour tout $z \in D(0;R)$.

Il résulte immédiatement de cette proposition que toute série entière est de classe C^∞ dans son disque de convergence.

Exemple

Posons pour $|z| < 1$,

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \ .$$

On a donc, à l'intérieur du dique unité :

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \ .$$

Table des matières

Soit f une fonction complexe définie dans un ouvert U du plan complexe.

Définition

Soit $z_0 \in U$. On dit que f est analytique en z_0 s'il existe

- un nombre $r > 0$ tel que $D(z_0; r) \subseteq U$,
- une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$

tels que l'on ait pour tout $z \in D(z_0; r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ .$$

On dit que f est analytique si elle est analytique en tout point de son ouvert de définition.

Proposition

Toute fonction analytique en un point z_0 est holomorphe en z_0. En particulier, toute fonction analytique est holomorphe.

Exemple

Une fonction polynôme est analytique.

En effet soit f une fonction polynomiale de degré n. Alors elle vérifie l'identité de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1!} f'(z_0) + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) \ .$$

Ceci montre que f est analytique en tout point z_0.

Série de Taylor

Notons qu'une fonction analytique en z_0 vérifie localement une identité qui généralise la précédente. Partant de l'égalité

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

on trouve par dérivations successives $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$. D'où l'écriture en "série de Taylor" en z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

où on a adopté la convention $f^{(0)} = f$.

Proposition

Si une fonction f est analytique dans un disque ouvert D, sa série de Taylor au centre de D converge absolument en tout point de D.

Table des matières

Rappels sur les fonctions réelles

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes (comme somme de séries convergentes) :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} . \end{aligned} \tag{1}$$

Exponentielle complexe

La série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ayant un rayon de convergence infini, elle définit une fonction entière : c'est la fonction exponentielle (complexe), qui sera notée soit $\exp(z)$, soit e^z. Elle prolonge à $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle réelle (autrement dit elle coïncide avec cette dernière sur $\mathbb{R}$).

Proposition

On a $\exp' = \exp$.

Preuve

En effet, d'après la proposition concernant la dérivée d'une série entière,

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp(z) \ .$$

Quelques propriétés

- L'identité suivante est vérifiée
$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)\ .$$
- En posant $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, on a en particulier
$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)\ .$$
Nous savons déjà que $\exp(x) = e^x$. D'autre part,
$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
de sorte qu'il vient
$$\exp(x + iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))\ .$$
Autrement dit,
$$|\exp(z)| = e^{\Re(z)}$$
et
$$\arg(\exp(z)) = \Im(z) \pmod{2\pi}\ .$$

Et quelques différences avec l'exponentielle réelle

$\exp(i\pi) = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$ et $\exp(2i\pi) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.
Compte tenu de $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$, on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z + i\pi) = -\exp(z)$$

et que $2i\pi$ est une période, i.e.,

$$\exp(z + 2i\pi) = \exp(z)\ .$$

Cela complique la définition d'un logarithme complexe.

Détermination principale du logarithme

Soit $z \in \mathbb{C}$. Il s'écrit sous forme polaire $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

Parmi les valeurs possibles pour θ choisissons la détermination principale de l'argument caractérisée par la condition $-\pi < \theta \leq \pi$.

On peut alors définir une fonction $L \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ par $L(z) = \ln(|z|) + i\theta$.

Soit $P = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ le plan fendu. Alors on peut montrer que L est holomorphe dans P et que $L'(z) = \dfrac{1}{z}$. La fonction holomorphe $L \colon P \to \mathbb{C}$ s'appelle la détermination (ou branche) principale du logarithme; elle est notée log.

Quelques propriétés

La fonction log possède certaines propriétés du logarithme népérien.

- Sa dérivée est $z \mapsto \frac{1}{z}$.
- Elle coïncide avec $\ln(x)$ pour $x > 0$.
- Pour tout z dans le plan fendu, $z = \exp(\log(z))$.

Cependant on a

$$\log(\exp(z)) = z$$

que sous la condition $-\pi < \Im(z) < \pi$.