Fonctions analytiques et exemples classiques

Exercice 1
Soit $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $P(z) = \Re(z)^2 - \Im(z)^2 - 2\Re(z)\Im(z) - 2\Re(z) + 3\Im(z)$. Déterminer toutes les fonctions $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telles que $f = P + iQ$ soit entière, et donner l'expression de $f(z)$ en fonction de z.

Exercice 2 (Applications à l'écoulement des fluides)

Notions fondamentales

On s'intéresse à l'étude d'un fluide (liquide ou gazeux, composé de particules du fluide) en mouvement et rencontrant un obstacle. Pour simplifier, les hypothèses suivantes sont réputées être satisfaites.

1. **L'écoulement fluide est à deux dimensions** (ou **bi-dimensionnel**) **:** les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. La vitesse du fluide est donc de la forme $\vec{V} = (V_x, V_y)$, où V_x (respectivement, V_y) est sa composante selon l'axe des abscisses (respectivement, ordonnées) [1]. On supposera V_x et V_y de classe C^1.
2. **L'écoulement est stationnaire :** la vitesse $\vec{V} = (V_x, V_y)$ en un point quelconque ne dépend que des coordonnées (x, y) et non du temps.
3. **Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel** (le fluide est dit **irrotationnel**) **:** il existe une fonction $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ appelée **potentiel des vitesses** telle que
$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$
4. **Le fluide est incompréssible :**
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$
ce qui exprime que la quantité de fluide, soumis à une pression extérieure, est constante.
5. **Le fluide est non visqueux :** il n'y a aucune friction sur les parois et les forces de pression qui s'y exercent sont perpendiculaires.

Énoncé de l'exercice

1. Montrer que le potentiel ϕ est harmonique, et qu'en conséquence il existe (au moins localement) une fonction $(x, y) \mapsto \psi(x, y)$, appelée **fonction de courant**, et une fonction holomorphe $z \mapsto \Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ (avec $z = x + iy$). Cette fonction est le **potentiel complexe**.
2. Calculer $\Omega'(z)$ et en déduire la **vitesse complexe** $V_x + iV_y$.

1. Autrement dit V_x (respectivement, V_y) désigne la composante de $\vec{V}$ en (x, y) selon l'axe des x (respectivement, y).

3. Étant donnée une fonction holomorphe de classe [2] C^1 $f\colon U \to \mathbb{C}$ telle que $f'(z) \neq 0$ pour chaque $z \in U$, de partie réelle P et partie imaginaire Q, soient deux familles de courbes
$$\begin{aligned} F_P &= \{\, (x,y) \colon P(x+iy) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \,\}, \\ F_Q &= \{\, (x,y) \colon Q(x+iy) = \beta,\ \beta \in \mathbb{R} \,\}. \end{aligned}$$
En mécanique des fluides ou en aérodynamique, lorsque P correspond au potentiel de vitesse ϕ, et Q à la fonction ψ de la question (1), F_P est la famille des **lignes équipotentielles** et F_Q est la famille des **lignes de courant**. Les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide.
   (a) Montrer que ces familles sont **orthogonales**, c'est-à-dire que chaque courbe de F_P coupe chaque courbe de F_Q sous un angle droit. (Pour rappel, les gradients $\vec{grad}(P)$ et $\vec{grad}(Q)$ sont normaux respectivement aux surfaces F_P et F_Q.)
   (b) Déterminer la famille G orthogonale à la famille de courbes
$$F = \{\, (x,y) \colon xy = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \,\}.$$
4. Considérons désormais le potentiel $\Omega(z) = V_0(z + \frac{a^2}{z})$ où a est une constante réelle non nulle.
   (a) Exprimer $\Omega(z)$ en coordonnées polaires et en déduire $\phi(r,\theta)$ et $\psi(r,\theta)$.
   (b) Quel est l'ensemble des points du plan complexe en lesquels la vitesse d'écoulement est nulle ? (On dit qu'il s'agit de l'ensemble des **points d'arrêts**.)
   (c) Sous l'hypothèse que seuls les points de la frontière de l'obstacle sont associés à la ligne de courant passant par les points d'arrêt, en déduire l'équation du contour de l'obstacle.
   (d) Étudier le comportement de $\vec{V}$ dans les cas suivants :
      i. $|x|$ est grand, et y quelconque.
      ii. $r^2 = a^2$ (comment évoluent les vitesses sur la frontière de l'obstacle ?).
      iii. $|y|$ grand et x quelconque.

Exercice 3 (Logarithme complexe)

1. Soit $z_0 \neq 0$. Résoudre l'équation $e^z = z_0$ en fonction de $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que la fonction exponentielle complexe est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.
3. Expliquer pourquoi l'exponentielle complexe n'est pas n'est pas inversible de $\mathbb{C}$ dans son image.
4. Si log désigne la détermination principale du logarithme dans le plan fendu $P = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, alors expliquer pourquoi cette fonction est injective.
5. Trouver le développement en série entière du logarithme complexe en $a \in P$.

Exercice 4 (Racine carrée)

1. Soit U le demi-plan $\{\, z \colon \Im(z) > 0 \,\}$. Montrer que U est un ouvert.
2. Montrer que $U = \{\, z \colon |z| > 0,\ \arg(z) \in]0, \pi[\,\}$.
3. Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ définie par la relation $f(z) = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\arg(z)}{2} + i \sin\frac{\arg(z)}{2})$. Montrer que $f(z)$ est une racine carrée de z. Montrer que f prolonge la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Nous verrons, dans la suite du cours, qu'une fonction holomorphe est nécessairement de classe C^∞.

4. Donner une expression de f à l'aide de la fonction exponentielle.
5. Montrer que $g(z) = \exp(\frac{1}{2}\log(z))$ est également une racine carrée de z sur le plan fendu $P = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ tout entier, et montrer que $g = f$ sur U.
6. Calculer la dérivée de g et en déduire que $g'(z) = \dfrac{1}{2g(z)}$.
7. Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver de fonction h prolongeant g à $\mathbb{C}$ tout entier telle que $h(-1) = i$ et $h(z_1 z_2) = h(z_1)h(z_2)$ pour tous z_1, z_2.